

Universidad de Granada  
Facultad de Ciencias

Departamento de Física Aplicada  
Grupo de investigación SNADS

Simulación y ensayos de vibraciones  
en placas de material compuesto de  
fibra de carbono y detección de daño  
mediante la Respuesta en Frecuencia  
y la Transformada Wavelet



Pablo Moreno García  
Tesis Doctoral



# Simulación y ensayos de vibraciones en placas de material compuesto de fibra de carbono y detección de daño mediante la Respuesta en Frecuencia y la Transformada Wavelet

por

Pablo Moreno García  
Licenciado en Física

## Directores de la Tesis

Dr. D. Antolino Gallego Molina  
Profesor Titular de Física Aplicada  
Universidad de Granada

Dr. D. Enrique Castro Rodríguez  
Profesor Contratado Doctor Interino de  
Física Aplicada  
Universidad Politécnica de Cartagena

Trabajo presentado para aspirar al grado de DOCTOR  
por la Universidad de Granada

Granada, mayo 2012





A mis padres



Esta Tesis Doctoral ha sido financiada parcialmente a través de una ayuda para la realización de tesis doctorales del programa de Formación de Personal Investigador (FPI), con referencia BES-2007-16392, concedida por el Ministerio de Educación y Ciencia (MEC), y mediante los proyectos “Aplicación de técnicas avanzadas de tratamiento de señales a la detección y caracterización de daño” (SEDA, referencia DPI2006-02970, proyecto del Plan Nacional de I+D+i), “Detección de daño en materiales compuestos avanzados de uso aeronáutico mediante técnicas vibro-acústicas y modelos de optimización” (DEMAC, referencia P08-TEP-03641, Proyectos de Excelencia de la Junta de Andalucía) y “Actividades de SHM en placas de material compuesto y cajones multilarguero de alas integradas” (DAICA, referencia CBC-DAICA SOW05-UGR, Contrato I+D con la empresa EADS-CASA).



# Colaboraciones

Durante esta Tesis Doctoral he realizado distintas colaboraciones científico-técnicas con diferentes investigadores, sin cuya colaboración la Tesis no habría sido posible. Estas colaboraciones se citan a continuación.

El Dr. José Luís Pérez Aparicio colaboró aportando y transfiriendo (en la medida de lo posible) sus amplios conocimientos de teoría de placas, materiales compuestos y FEM, así como en el diseño del montaje experimental de las placas.

El Dr. Andrés Roldán Aranda colaboró con la electrónica del montaje experimental, tanto en el diseño como en la optimización.

La ingeniera Liliana Romo Melo colaboró enseñándome a manejar el sistema PULSE. También hizo una primera instrumentación de los PZT y de el sistema de cableado, antes de enseñarme lo necesario para valerme por mí mismo.

El ingeniero Álvaro Ladrón de Guevara López-Sáez colaboró en la construcción de las cajas de conexiones.

El profesor Juan de Mata Vico Rodríguez colaboró en el diseño y ejecución del montaje experimental de las placas.

El técnico de laboratorio Cristobal José Infantes Márquez colaboró en los montajes experimentales de las placas.

El ingeniero César Fernández Casanova colaboró en la aplicación de técnicas de detección de daño a placas con delaminación simuladas mediante FEM.

Finalmente, el Dr. José Viriato Araújo dos Santos colaboró en la profundización del conocimiento del método de Ritz.

Para todos ellos, mi gratitud, ha sido un auténtico placer.

Granada, mayo 2012



# Agradecimientos

Una Tesis Doctoral es un proceso extremadamente complejo. Supone trabajar mucho durante varios años y librar mil batallas contra el ordenador, los cables rebeldes o la burocracia. Una vez terminado, hay que seleccionar parte de ese trabajo, ordenarlo, darle forma y presentarlo en una Memoria que se debe defender ante un tribunal. Esa complejidad requiere que, aparte de tener ilusión y ganas de trabajar, el doctorando se encuentre en un estado mental adecuado para tomar las decisiones correctas en cada momento. En este caso, que el doctorando soy yo, puedo afirmar que cuando las decisiones tomadas no hayan sido correctas sin duda se debió a mi natural torpeza, y en ningún caso a sentirme mal, gracias al fabuloso ambiente en el que me he encontrado siempre. Por tanto, tengo mucho que agradecer a las personas que me han rodeado todo este tiempo.

En primer lugar, dar las gracias a mis directores de Tesis, a Antolino, por la confianza depositada, el trabajo constante y la dedicación, en resumen, por estar siempre ahí; a Enrique, por escucharme siempre con tanta paciencia, por sus siempre acertadas sugerencias, y en definitiva, por proporcionarme el privilegio de que un amigo te dirija la Tesis.

No cabe duda de que en la investigación actual se hace imprescindible contar con el apoyo de un grupo de investigación, que en mi caso ha sido el grupo SNADS. Aparte de las infraestructuras, el laboratorio, el apoyo económico y todo lo necesario para desarrollar mi investigación, he tenido la suerte de encontrarme con un equipo humano maravilloso, de los que puede disfrutar en situaciones que van desde las famosas “fiestas locas” hasta la tranquilidad de una conversación con *shawarma* y cerveza extranjera en la mano. Sin un orden en particular y haciendo el agradecimiento extensivo a las respectivas parejas, gracias a Liliana, que ha hecho conmigo este “viaje hacia el conocimiento” casi desde el principio; a Cristobal

---

(mi hígado no sería lo mismo sin ti); a Eli, por su amistad, sus ganas de organizar cosas, y por todo lo que se puede aprender con ella al lado; a Álvaro, por esa maravillosa capacidad de estar justo ahí siempre que hace falta; sin olvidarme de los que han compartido menos tiempo conmigo: Fran, Roberto, Juan Luis, César, Antonio (autor de la mayoría de las fotos presentadas en esta Tesis). También a Santi y a “los chicos del laboratorio”, que en tantas cosas me han ayudado. Y por supuesto, un recuerdo especial para Juande, no consigo imaginarme cómo se las apañará el grupo sin ti.

Pero el trabajo debe realizarse en algún sitio físico. Y en mi caso, cuando no estaba en el laboratorio, estaba en el despacho de la Facultad de Ciencias, donde de nuevo encontré un montón de gente maravillosa, de forma que levantarse cada mañana a trabajar se convirtió en un auténtico placer. A los que había cuando llegué y se fueron pronto (Fernando Vereda, Fernando Martínez, Sándalo, Roberto, Manolo, Javier) les agradezco acompañarme durante mis primeros pasos en este mundillo. Mención especial a Juan Carlos y a “el Moro”, por abrirme los ojos sobre qué es realmente una Tesis. También me quiero acordar de la gente que estuvo poco tiempo por aquí: Carlos, Sonia, Toni, César Augusto y Luisma (que no es tonto), aportando su granito de arena al buen rollo general. Pero sobre todo tengo que agradecer a la gente que me ha acompañado durante la mayor parte de esta Tesis: a Peláez y a Efrén, por su amistad, todo lo que tengo que agradecerles podría ocupar un libro por sí solo; a M. Wulff, uno de los mejores compañeros de despacho que se puede tener; a Amelia, por ser siempre tan positiva; a César (si alguna vez soy la décima parte de ordenado que tú me sentiré realizado); a Carmen y Felipe, por sus interesantes conversaciones, que me enseñaron que la vida tiene muchos puntos de vista; a Miriam, siempre tan callada, pero siempre ahí; a Juan Pablo, por su complicidad y por esas inolvidables conversaciones filosóficas; a Paola (no pierdas tu inocencia, te hace única); a Azahara, por la vidilla que le da a la sala; a Germán, de quien me gustaría aprender solo un poquito de su serenidad, saber estar y grado de compromiso; a Miguel Ángel, por ser todo un ejemplo de luchador nato; a Jose Antonio, por su desbordante y contagiosa alegría; y a Yadira y Leo (la última en llegar), con quien he interactuado pocas veces, pero todas ellas muy agradables. Ya fuera del despacho, pero en los alrededores, no me quiero olvidar de Arturo, Ana Belén y Conrado, con quien es un placer compartir departamento.



---

Quien me conoce sabe que me gusta dejar las cosas mejor que como me las encontré, o al menos intentarlo. Por eso durante estos años he colaborado como he podido con la Asociación de Jóvenes Investigadores de Granada (ASI) y la Federación de Jóvenes Investigadores, FJI/Precarios, con intención de que las condiciones de trabajo de los investigadores sean mejores que las que yo me encontré. A nivel personal sería casi imposible citar a todas las personas que admiro y a las que tendría que agradecer el haberme dado la oportunidad de trabajar a su lado. Por hacer un mínimo intento, nombraré a Ali, Ana López, Aurora, Ceci, David Frigola, Elena Capel, Escartín, Ester, Francisco González, Gloria Torres, Jabi, Javi Contreras, Noe, Pili, Xavi de Pedro y Xavi Orlandi. Y por supuesto, agradecer (aparezcan en esa lista o no) a todos los que estuvieron antes que yo (consiguiendo avances tan importantes), a los que han estado conmigo, y a los que vendrán. En resumen, gracias por aportarle “dignidad naranja” a esta profesión.

Alejándome un poco más del trabajo, tampoco me puedo olvidar de los grupos de amigos que conservo desde la carrera. Por ejemplo, la gente con la que tantas veces me reí en comedores los primeros años de la Tesis: Fran, Manolo, Antonio y Victor. O los amigos con los que he compartido tanto “frikismo”: Dani, Raquel, Lidia, Alex, Sheila, Bea, Antonio, Rosa, Jose, Jesús, Pamela, y en especial Jorge, con esos míticos viajes y tantas cervezas compartidas. Y por supuesto, no pueden faltar Paco e Isa, esos eternos faros de cordura que tantas veces me han alumbrado la dirección correcta.

Si nos vamos aún más lejos, en un sentido físico, he tenido la suerte de contar con la compañía ocasional (mucho menor de lo que me gustaría) de varios de los amigos del instituto: Breto, Javi, Oller y Rubén, que junto a sus respectivas novias, consiguen rejuvenecerme instantáneamente en cada una de mis visitas a Roquetas.

Por último, por supuesto, gracias a toda mi familia, con especial mención a mi abuela. Y por supuesto a mis padres, de los que solo he recibido apoyo incondicional.

Que sepáis todos que un poquito de esta Tesis es vuestra.

Granada, mayo 2012



# Índice general

Abstract	xix
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Motivación y estado actual . . . . .	1
1.2 Objetivos . . . . .	3
1.3 Marco de la investigación . . . . .	4
1.4 Organización de la Memoria . . . . .	5
1.5 Perspectivas . . . . .	6
<b>2 Bases teóricas para el estudio de vibraciones en placas</b>	<b>9</b>
2.1 Teoría de placas . . . . .	9
2.1.1 Introducción . . . . .	9
2.1.2 Deflexión estática de placas . . . . .	11
2.1.3 Deflexión dinámica de placas . . . . .	22
2.1.4 Cálculo de energías de la placa . . . . .	23
2.2 El método de Ritz . . . . .	25
2.3 El Método de los Elementos Finitos (FEM) . . . . .	31
<b>3 Descripción del experimento</b>	<b>35</b>
3.1 Descripción general . . . . .	35
3.2 Descripción de las placas . . . . .	38
3.3 Descripción de los PZT usados . . . . .	43
3.4 Condiciones de contorno de las placas . . . . .	48
3.5 Mesas de apoyo . . . . .	50
3.6 Instrumentación de los sensores y actuadores . . . . .	51

3.7	Conexiones . . . . .	52
3.8	Caracterización en frecuencia de los sensores y del sistema . . . . .	54
3.8.1	Resultados . . . . .	56
3.9	Colocación de los sensores y actuadores PZT . . . . .	58
3.10	Protocolo experimental . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Caracterización de las placas sin daño</b>	<b>63</b>
4.1	Análisis modal: modos y frecuencias . . . . .	64
4.1.1	Ajuste de parámetros . . . . .	64
4.1.2	Simulación mediante FEM . . . . .	65
4.1.3	Cálculo semianalítico mediante el método de Ritz . . . . .	74
4.1.4	Ensayos experimentales . . . . .	79
4.1.5	Comparación FEM-Ritz-Experimento. Discusión . . . . .	82
4.2	Análisis transitorio: Respuesta en el Dominio del Tiempo . . . . .	87
4.2.1	Medida experimental del coeficiente de amortiguamiento . . . . .	87
4.2.2	Simulación mediante FEM . . . . .	89
4.2.3	Excitación mediante señales tipo ruido blanco . . . . .	94
4.2.4	Excitación mediante señales senoidales . . . . .	103
4.2.5	Discusión . . . . .	125
<b>5</b>	<b>Implementación del daño y técnicas de detección</b>	<b>127</b>
5.1	Daños modelados computacionalmente . . . . .	127
5.1.1	Simulación mediante FEM . . . . .	128
5.1.2	Cálculo semianalítico mediante el método de Ritz . . . . .	131
5.2	Daños estudiados mediante ensayos experimentales . . . . .	133
5.2.1	Daños por masa añadida . . . . .	133
5.2.2	Daños por cambio en las condiciones de contorno . . . . .	136
5.2.3	Daños por cambio de temperatura . . . . .	136
5.3	Técnicas de detección de daño usadas . . . . .	138
5.3.1	<i>Modal Assurance Criterion</i> (MAC) . . . . .	138
5.3.2	Transformada Wavelet bidimensional usando información de la placa sin daño . . . . .	140
5.3.3	Transformada Wavelet bidimensional sin usar información de la placa sin daño . . . . .	143

5.3.4	Cambios globales en la Respuesta en Frecuencia . . . . .	146
<b>6</b>	<b>Detección de daño mediante análisis modal</b>	<b>149</b>
6.1	Análisis modal de placas dañadas . . . . .	149
6.2	Detección de daño mediante <i>Modal Assurance Criterium</i> (MAC) . .	151
6.2.1	Placa Aluminio . . . . .	152
6.2.2	Placa CFRP1 . . . . .	161
6.3	Detección de daño mediante Transformada Wavelet bidimensional usando información sobre la placa sin daño . . . . .	164
6.3.1	Criterio de detección de daño . . . . .	164
6.3.2	Resultados . . . . .	166
6.4	Detección de daño mediante Transformada Wavelet bidimensional sin usar información sobre la placa sin daño . . . . .	171
6.4.1	Extensión de los modos . . . . .	171
6.4.2	Criterio de detección de daño . . . . .	172
6.4.3	Resultados . . . . .	175
6.5	Discusión . . . . .	176
<b>7</b>	<b>Detección de daño mediante análisis en frecuencia de series tem- porales</b>	<b>179</b>
7.1	Análisis en frecuencia de series temporales en placas dañadas . . . .	179
7.1.1	Daños por agujero . . . . .	179
7.1.2	Daños por aumento y disminución de la densidad . . . . .	181
7.1.3	Daños por disminución del módulo de Young . . . . .	181
7.1.4	Daños por masa añadida . . . . .	183
7.1.5	Daños por cambio en las condiciones de contorno . . . . .	192
7.1.6	Daños por cambio de temperatura . . . . .	192
7.2	Detección de daño mediante cambios globales de la Respuesta en Frecuencia . . . . .	201
7.2.1	Daños por agujero . . . . .	201
7.2.2	Daños por aumento y disminución de la densidad . . . . .	202
7.2.3	Daños por disminución del módulo de Young . . . . .	204
7.2.4	Daños por masa añadida . . . . .	205
7.2.5	Daños por cambio en las condiciones de contorno . . . . .	208

7.2.6	Daños por cambio de temperatura . . . . .	209
7.3	Tolerancia al ruido del índice de daño $D_T$ . . . . .	211
7.4	Discusión . . . . .	214
<b>8</b>	<b>Conclusions and future work</b>	<b>215</b>
8.1	Conclusions . . . . .	215
8.2	Future work . . . . .	218
<b>A</b>	<b>Modos de vibración</b>	<b>221</b>
A.1	Placa Aluminio sin daño . . . . .	221
A.2	Placa CFRP1 sin daño . . . . .	227
A.3	Placa CFRP2 sin daño . . . . .	233
A.4	Placa CFRP1 con daño por agujero de 4 cm en la posición P3 . . . . .	239
A.5	Placa CFRP1 con daño por disminución en ambos módulos de Young (-10 %) . . . . .	245
A.6	Placa CFRP1 con daño por disminución en ambos módulos de Young (-1 %) . . . . .	251
<b>B</b>	<b>Cálculo analítico de las integrales en el método de Ritz</b>	<b>257</b>
B.1	Sin movimientos de sólido rígido . . . . .	257
B.2	Con movimientos de sólido rígido . . . . .	267
B.3	Constantes usadas para diferentes condiciones de contorno . . . . .	272
B.3.1	empotrada-empotrada . . . . .	273
B.3.2	apoyada-apoyada . . . . .	273
B.3.3	libre-libre . . . . .	274
B.3.4	deslizante-deslizante . . . . .	274
B.3.5	empotrada-apoyada . . . . .	274
B.3.6	empotrada-libre . . . . .	274
B.3.7	empotrada-deslizante . . . . .	275
B.3.8	apoyada-libre . . . . .	275
B.3.9	apoyada-deslizante . . . . .	275
B.3.10	libre-deslizante . . . . .	275

# Abstract

There is no doubt that damage detection in materials and structures is a topic of great industrial interest, since it allows one to reduce maintenance costs as well as technological, economic and social risks related to the structure. This is a key issue in engineering, particularly in design and industrial production, that has been addressed by a number of research efforts. To date, researchers have put forth multiple methods and techniques under what is generically referred to as Non-Destructive Tests (NDT), including ultrasonic, acoustic emission, eddy current, thermography, electromagnetic methods, and penetrant liquid tests. All of them are based on inspection of the structure at time intervals and fixed positions; that is, at the time and place of performance by technicians. They are therefore known as local methods. In contrast, a more recent trend is to inspect the health of the entire structure continuously over time, extracting features that allow it to be permanently monitored in terms of its state, providing conclusions that underline its life-time and the need for any repairs (global methods). This idea gives rise to self-disciplinary R+D work, named Structural Health Monitoring (SHM). The pioneer work by Chang [42] indicates various scientific and economic aspects, along with an array of applications of SHM.

Composite materials are required for many industrial sectors, given their low density and high strength and stiffness. Outstanding among these is Carbon Fiber Reinforced Polymer (CFRP). However, it is well known that its mechanical properties may be significantly degraded in the presence of damage. Given its multilayer construction, the most common damage is an internal delamination, which also often occurs after the impact of some external object. It is the main material used in this Thesis, but one plate used was aluminium, a material widely studied and widely used in aeronautics.

This PhD Thesis uses Kirchoff plate theory, Ritz method and Finite Element Method (FEM) as the pillars of the theoretical calculations.

The experimental work performed in this Thesis consists of vibration tests on rectangular plates, making them vibrate with a known excitation, using piezoelectric (PZT) actuators and sensors. Three plates were studied: one of aluminium (isotropic material), and two of CFRP (CFRP1 and CFRP2), the first one made of an orthotropic material and the second one made of a quasi-orthotropic material. Plate CFRP2 plate had two zones with different thicknesses.

The plates were excited through a signal by means of one of the piezoelectric actuators (one on the center of the plate, the other one on the lower left quarter). The response signal of the plate was measured by four piezoelectric sensors positioned symmetrically with respect to the center. The plate was fully clamped (with a rigid steel frame) in most experiments, and quasi-free (resting on a sponge) in some of them. Piezoelectric sensors were connected with STP cables to the Brüel & Kjær PULSE equipment input channels. The excitation signal was also generated with the PULSE output port. The Piezosystem EPA-104 amplifier boosted, with x20 gain, the PULSE output signal to the actuator. To reduce the influence of external vibrations, the frame was fixed to an anti-vibration table and the measurements were carried out at night with minimal environmental noise. To minimize the electromagnetic interference and electrical noise, the measurements were made in a differential way, and all equipment, including connection boxes, cable shields, frame, plates and support table, was connected to an independent ground system.

A characterization of the PZT used demonstrated that they have a flat response from 200 to 1600 Hz.

To characterize the vibration response of the undamaged plates used throughout this work we applied two approaches: modal analysis, which consists of studying the vibration modes and main frequencies of the plate, and transient analysis, studying the response of the plate in the time domain to a given excitation. For the modal analysis, three tools were used: FEM, Ritz method, and frequency analysis of experimental signals. The transient analysis involved the use of two tools: analysis of experimental signals and FEM signal.

For modal analysis, the first step was to use frequency analysis of experimental signals to identify the initial main frequencies of the plate. Then, because it is



very difficult to experimentally measure the thickness of the plate with accurate precision, an adjustment was made in order to find the optimal thickness. Having the optimal value of thickness, FEM simulations and Ritz method calculations were performed, obtaining similar results with the two, and differences with experimental frequencies were less than 3% in most cases. The mode shapes obtained with FEM and the Ritz method were very similar.

For transient analysis, the first step was to experimentally measure the Rayleigh damping coefficients for all the plates, using these values for the FEM simulations. The excitations used were of two types: a random white-noise vibration signal with frequencies from 0 to 1600, and sines of different frequencies. The tests using white-noise as the excitation signal gave very similar results in the experimental and simulation tests. On the other hand, the tests using sines as the excitation signal gave different results for each test, despite the fact that the plate was always the same. This is because the obtained Frequency Response is dominated by the first harmonics of the excitation frequency, and the values of this peak are not always in the same proportions. It was proven that the cause of this behaviour was a misalignment between the PZT used and the plate, or possibly an internal misalignment of the PZT themselves.

Damage studies were carried out using both modal and transient analysis. For modal analysis, the damage performed computationally (FEM and Ritz method) was holes, density increase and decrease, and Young's modulus reduction, all of them in three positions. In this case, the techniques used to detect the damage were the Modal Assurance Criterion (MAC), the Wavelet Transform using information of the undamaged plate, and an hybrid technique presented in this Thesis, using Wavelet Transform and the Ritz method, which allows for damage detection without having information about the undamaged plate.

Regarding the transient analysis, the types of damage performed with the FEM simulations were the same as in modal analysis, but in only one position. The damage performed in the experimental tests consisted of added mass in different positions, boundary condition changes, and temperature increase. The technique used to detect the damage was a damage index presented in this Thesis ( $D_T$ ), that computes the differences between the Frequency Responses of the damaged and undamaged plates.

The results of the damage detection using modal analysis show that MAC is a valid technique to detect all but the smallest damage. In general, the results of applying the MAC to FEM and Ritz modes is similar, except for the holes, where the Ritz method provides much higher values, suggesting that the damage is overestimated in this case. The disadvantages of MAC would be that it needs a large number of modes to make the results reliable, it does not provide information about the location of the damage, and it requires information about the undamaged plate.

On the other hand, with the Wavelet Transform technique it is possible to detect and locate the damage, even the smallest, and especially holes and Young's modulus reduction damage, with both the FEM and Ritz modes. For increases and decreases in density, the damage is barely located using FEM modes, and only for the greatest values. However, using Ritz modes the damage is clearly located in almost all cases, suggesting again that the damage is overestimated when the damage modes are computed by means of the Ritz method. This technique is also hampered by the fact that it requires information about the undamaged plate, which is not always possible from a practical standpoint.

The third technique used to detect damage with modal analysis is a hybrid technique presented in this Thesis, using the Ritz method and Wavelet Transform. Despite its being less effective than the other Wavelet-based technique, it has the great advantage of not requiring information about the undamaged plate.

Finally, the results of the damage detection using transient analysis show that the computational simulated damage, being too small, is barely or not detected (though it is relatively easy to detect with modal analysis). The experimental damage was detected in all cases. For the added mass damage, it is shown that different positions cause large changes in different frequency ranges.

The change of temperature when the plate is clamped causes a change in the Frequency Response of the plate, visible even for a few Celsius degrees of change. This is due to thermal stresses caused by the difference between linear expansion coefficients of the rigid frame material (steel) and plate materials (aluminium, CFRP). When the coefficient of linear expansion of the plate material is greater than the frame, the plate loses stiffness under increased temperature, and when it is lower, it gains rigidity when the temperature increases. When the plate is

quasi-free, no shifts in the peaks of the frequency response are observed.

The final study carried out for this Thesis was about the tolerance of the damage index  $D_T$  to noise. To do this, artificial noise was added to the signals, and the results were compared between three types of distances (**spearman**, **citiblock** and **euclidean**), showing that **spearman** distance is more tolerant to noise. This distance has the added advantage of being independent of the applied normalization.



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Motivación y estado actual

No cabe duda de que la detección del daño en materiales y estructuras es un aspecto de enorme interés industrial ya que permite disminuir los costes de mantenimiento y los riesgos tecnológicos, económicos y sociales relacionados con la estructura. Este es un aspecto que en Ingeniería en general, y en el diseño y producción industrial en particular, no pasa desapercibido y que ha sido objeto de estudio de muchas investigaciones, desarrollándose múltiples métodos y técnicas de lo que genéricamente se denominan Ensayos No Destructivos (NDT, por sus siglas en inglés), como ultrasonidos, emisión acústica, corrientes inducidas, termografía, métodos electromagnéticos, líquidos penetrantes, etc. Todos ellos inspeccionan a la estructura en intervalos de tiempo y posiciones fijas, es decir, cuando los técnicos lo realizan. Son lo que se denominan métodos locales. En contraste, durante los últimos años ha tomado mucha fuerza la idea de inspeccionar la salud de toda la estructura de manera continuada en el tiempo, extrayendo características de la misma que permitan aportar permanentemente conclusiones sobre su estado, y por tanto, sobre su tiempo de vida y la necesidad de eventuales reparaciones (métodos globales). Esta idea constituye una disciplina propia de trabajo I+D, denominada *Structural Health Monitoring* (SHM). Véase el trabajo de Chang [42] donde se indican varios aspectos científicos, económicos y aplicaciones del SHM.

Realizar el mantenimiento solo cuando sea necesario (*Maintenance on Condition*) es uno de los grandes objetivos de la industria en general, y de los constructores aeronáuticos en particular. El sistema SHM pone a la estructura en condiciones de sentir y, en el caso de aeronaves, por ejemplo, acorta las inmovilizaciones a que obliga el mantenimiento. En el futuro influirá además en el diseño de aeronaves, ya que estructuras y sistemas no solo se unirán, sino que, literalmente, se fundirán unas con otros.

Con ayuda del SHM, las compañías aéreas se podrían beneficiar en un futuro próximo de una inmovilización en tierra y de costes de mantenimiento claramente menores. A largo plazo, el SHM es la palanca que impulsará el cambio de los planteamientos conservadores del diseño aeronáutico porque ofrece perspectivas inéditas en lo relativo al esfuerzo en determinadas zonas estructurales durante las fases de carreteo, despegue, vuelo y aterrizaje, así como en situaciones extremas, como en un aterrizaje violento.

De acuerdo con Rytter [118], existen cuatro niveles de diagnóstico de daño estructural: el Nivel 1 consiste en la detección de la existencia de daño, el Nivel 2 en la localización del daño, el Nivel 3 en la cuantificación del daño y el Nivel 4 en el pronóstico del tiempo de vida restante de la estructura. Como argumentan Fietzen y Güemes [58], son muchos los problemas aún sin resolver en cada uno de estos niveles. Son muchos los trabajos que podemos encontrar en los últimos dos años que abarcan el tema de detección de daño, lo que pone de manifiesto su interés y actualidad.

Los materiales compuestos son requeridos por muchos sectores industriales, y de manera especial por el aeronáutico, debido a su baja densidad y su alta resistencia y rigidez. Entre ellos, unos de los más usados son los materiales Polímeros Reforzados con Fibra de Carbono (CFRP, por sus siglas en inglés). Sin embargo, es bien conocido que sus propiedades mecánicas pueden verse considerablemente degradadas en presencia de daño. Debido a su construcción multicapa, el daño más habitual consiste en una delaminación interna, que además frecuentemente se produce tras un impacto de un objeto externo [43]. Este será el principal material usado en esta Tesis Doctoral, si bien en una de las piezas se ha llevado a cabo un estudio paralelo con aluminio, por ser un material ampliamente estudiado, y también muy usado en aeronáutica.

Existen varios procedimientos para abordar la detección de daño (Nivel 1), dependiendo del tipo de estructura. Quizás los más desarrollados son los que se basan en extraer los modos propios de vibración de la estructura (análisis modal), intentando observar variaciones de los mismos cuando la estructura está dañada [102]. Este es el primer enfoque usado para detectar daño en esta Tesis Doctoral.

Sin embargo el análisis modal requiere de una amplia red de sensores, por lo que su implementación industrial resulta costosa. Es por ello que recientemente están teniendo más auge los procedimientos basados en las perturbaciones que un defecto puede producir en una onda elástica transitoria que se propaga por la estructura [58]. No obstante, el desarrollo actual de estas técnicas no es el mismo que el de las primeras, fundamentalmente por la escasez de algoritmos capaces de correlacionar la respuesta experimental de la estructura con su daño y llevar esta información a una forma útil, sin falsas alarmas. En definitiva, para aumentar la sensibilidad a la existencia del defecto, e incluso para mejorar su ubicación (Nivel 2), se requiere introducir modelos computacionales, tal y como sugieren Fietzen, Güemes y Chang [42, 58]. Además, tal y como se indica en [58], se hace necesaria la participación en el problema de técnicas avanzadas de tratamiento de señales que permitan aumentar la capacidad de discriminación entre estructuras dañadas y no dañadas, a partir de un análisis más productivo de los datos captados por los sensores. Este ha sido el segundo enfoque usado para detectar daño en esta Tesis Doctoral.

## 1.2 Objetivos

El objetivo de esta Tesis Doctoral es la detección de daño en placas de aluminio y material compuesto (CFRP), desde dos enfoques diferentes:

- El análisis modal, mediante el estudio de los cambios en los modos de vibración y las frecuencias naturales de las placas.
- El análisis transitorio, mediante el estudio de los cambios en la respuesta de la placa en el dominio de la frecuencia a una determinada excitación.

El primer enfoque se ha abordado mediante dos metodologías:

- Simulación mediante el método de los elementos finitos (FEM).

- Cálculos semianalíticos mediante el método de Ritz.

Para el análisis transitorio se han usado dos metodologías:

- Análisis de señales temporales obtenidas mediante simulación FEM.
- Análisis de señales temporales medidas experimentalmente.

Los daños estudiados son daños simples, si bien el objeto de la Tesis es desarrollar técnicas de detección de daño que puedan servir igualmente para detectar daños más complejos y realistas, como puede ser una delaminación en el caso de los materiales CFRP.

### 1.3 Marco de la investigación

Durante la realización de esta Tesis Doctoral el doctorando ha contado con la financiación de una ayuda para la realización de tesis doctorales del programa de Formación de Personal Investigador (FPI), con referencia BES-2007-16392, concedida por el Ministerio de Educación y Ciencia (MEC). Dicha ayuda estaba adscrita al proyecto del Plan Nacional de I+D “Aplicación de técnicas avanzadas de tratamiento de señales a la detección y caracterización de daño” (SEDA, referencia DPI2006-02970, dirigido por el profesor Antolino Gallego). Igualmente ha colaborado en otros proyectos intimamente relacionados, como el Proyecto de Excelencia de la Junta de Andalucía “Detección de daño en materiales compuestos avanzados de uso aeronáutico mediante técnicas vibro-acústicas y modelos de optimización” (DEMAC, referencia P08-TEP-03641), y el contrato I+D con la empresa EADS-CASA (filial de Airbus) llamado “Actividades de SHM en placas de material compuesto y cajones multilarguero de alas integradas” (DAICA, referencia CBC-DAICA SOW05-UGR), ambos dirigidos por el profesor Gallego.

El Grupo de Investigación en el que se ha integrado el doctorando durante este periodo (conocido por el acrónimo SNADS por su nombre en inglés “*Signal and Numerical Analysis in Dynamic Systems*”) tiene una amplia experiencia en el campo de la detección de daño, habiéndose desarrollado previamente técnicas para detectar daño en vigas, basadas en la Transformada Wavelet [33]. En la presente Tesis Doctoral esta técnica ha sido generalizada a dos dimensiones, para su uso en detección



de daño en placas. Dentro del mismo grupo de investigación se desarrollan otras fructíferas líneas haciendo uso de emisión acústica y/o vibraciones para detección de daño en estructuras metálicas y de hormigón [21–24, 34–36, 59–63, 108, 109].

Durante su investigación, el doctorando ha realizado dos estancias de investigación en otros centros: una en la Universidad Politécnica de Valencia y otra en el *Instituto Superior Técnico* de la *Universidade Técnica de Lisboa*. Fruto de la colaboración con el grupo de investigación de la Universidad Politécnica de Valencia, dirigido por el profesor Pérez-Aparicio, fue la profundización en los conceptos referentes a teoría de placas y simulación mediante FEM. El principal resultado de la estancia en Lisboa queda reflejado en el Apéndice B de esta Memoria.

Resultados preliminares relacionados con esta Tesis Doctoral se plasmaron en una ponencia oral en el congreso *International Conference on Structural Engineering Dynamics*, ICEDyn 2011 [96], y en un artículo científico, “*Vibration tests in CFRP plates for damage detection via non-parametric signal analysis*”, aceptado para publicación en la revista *Shock and Vibration* [97]. Con los resultados finales aquí expuestos, se espera poder publicar varios artículos científicos más, una vez defendida la Tesis.

Si bien los daños estudiados en esta Tesis Doctoral han sido daños de carácter simple o poco realista, como agujeros, masas añadidas o pérdidas de rigidez local sin cuestionar el mecanismo que los provoca, es necesario reseñar que la técnica expuesta en la Sección 5.3.3 ha sido aplicada a modos de placas con una delaminación interna, generados computacionalmente en el marco de la Tesis Doctoral de otro miembro del grupo de investigación SNADS, el ingeniero César Fernández Casanova. Dicha colaboración dio como resultado un artículo científico, que en el momento de redacción de esta Memoria estaba en proceso de revisión (“*Modal analysis of delaminated composite plates using the Finite Element Method and damage detection via a combined Ritz/2d-Wavelet Analysis*”, enviado a la revista *Journal of Sound and Vibration* [64]).

## 1.4 Organización de la Memoria

La Memoria se organiza de la siguiente forma:

- En el Capítulo 2 se explican las bases teóricas necesarias para el estudio

de placas sin daño mediante la teoría de elasticidad de Kirchoff, así como el método de Ritz y una pequeña introducción al método de los elementos finitos (FEM).

- En el Capítulo 3 se describen los ensayos experimentales llevados a cabo sobre placas de aluminio y CFRP.
- En el Capítulo 4 se presentan los resultados del análisis modal y transitorio de placas sin daño, así como una correcta caracterización de sus propiedades y comportamiento, imprescindible para una correcta detección del daño.
- En el Capítulo 5 se describen los daños implementados (tanto computacional como experimentalmente) y las técnicas usadas para su detección.
- En el Capítulo 6 se presentan los resultados de detección de daño mediante análisis modal.
- En el Capítulo 7 se presentan los resultados de detección de daño mediante análisis en frecuencia de señales transitorias.
- En el Capítulo 8 se exponen las conclusiones y el trabajo futuro.
- En el Apéndice A se presentan diferentes ejemplos de modos de vibración de las placas estudiadas.
- En el Apéndice B se presenta la implementación analítica del método de Ritz llevada a cabo en esta Memoria, con ampliación a otras condiciones de contorno.

## 1.5 Perspectivas

Esta Tesis Doctoral es la primera sobre detección de daños en placas llevada a cabo dentro del Grupo de Investigación SNADS. Por tanto, como es natural, deja abiertas muchas más puertas de las que cierra, como se puede observar en la Sección 8.2.

El doctorando, una vez defendida su Tesis, tiene previsto continuar su investigación en Portugal, en el marco de un proyecto de investigación en colaboración

entre el INEGI (*Instituto de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial*) en Porto y el IST (*Instituto Superior Técnico*) en Lisboa, profundizando en el conocimiento de los métodos numéricos adecuados para detectar daño.

Igualmente, manteniendo el contacto con el grupo SNADS, el doctorando aparece como responsable de una parte del proyecto “AULamb”, solicitado recientemente dentro de la convocatoria del Plan Nacional de I+D+i. Dicho proyecto plantea la detección de daño en materiales CFRP mediante técnicas basadas en ondas de Lamb, desde un enfoque tanto computacional como experimental, siendo una continuación natural del trabajo desarrollado en esta Tesis Doctoral.



## Capítulo 2

# Bases teóricas para el estudio de vibraciones en placas

### 2.1 Teoría de placas

#### 2.1.1 Introducción

Una placa es una estructura continua tridimensional tal que una de sus dimensiones es mucho más pequeña que las otras dos ( $h \ll a, b$ ). En el caso de materiales compuestos laminados, cada material presenta una serie de zonas diferenciadas a lo largo de su espesor, a las que llamaremos “capas”, compuestas generalmente de fibras alineadas en una dirección e incuistradas en una matriz de polímero. Cada capa presenta diferentes propiedades mecánicas en función de la orientación de las fibras, así como de las propiedades de las fibras y el polímero que la compone. En la Figura 2.1, podemos observar un esquema de una placa de material compuesto laminado de dos capas, donde se pueden observar las dimensiones, el sistema de coordenadas global y el sistema de coordenadas local de la capa superior, así como la orientación de las fibras en esta capa.

Este trabajo se ha realizado sobre tres tipos de placas:

- La Placa Aluminio, de material isótropo de una sola capa.
- La placa CFRP1, de material ortótropo con capas en dos direcciones diferentes.

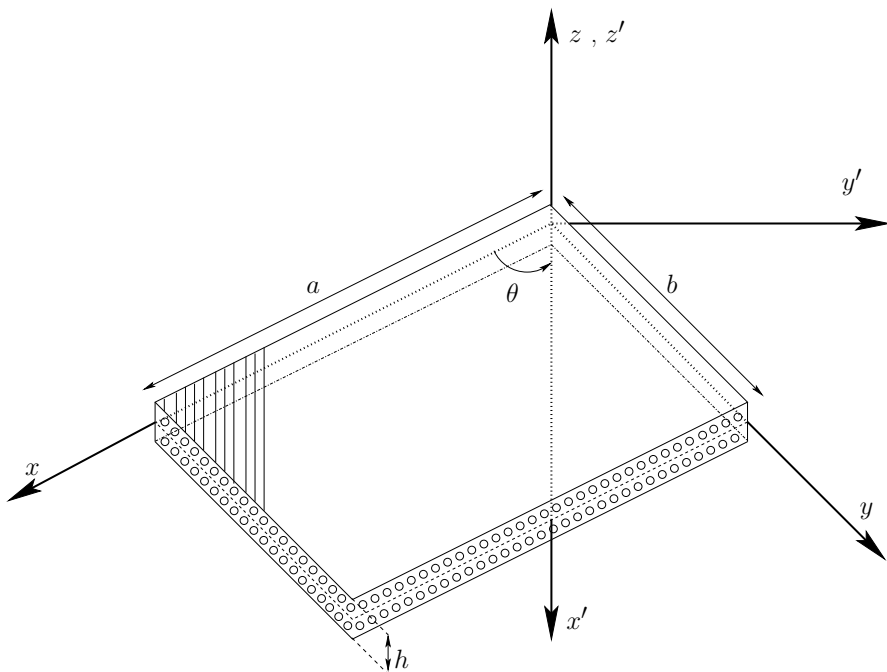


Figura 2.1: Esquema de placa de material compuesto laminado de dos capas.

- La placa CFRP2, de material anisótropo con capas en cuatro direcciones diferentes.

Estas placas quedarán definidas en detalle en la Sección 3.2. Todos los cálculos se han realizado considerando que la placa es de material anisótropo, siendo los casos de placa ortótropa y placa isotrópica casos particulares.

Tomando como sistema de referencia el sistema de coordenadas global  $(x-y)$  de la Figura 2.1, llamaremos caras a las superficies externas de la placa con  $z = \pm h/2$ , y lados a las superficies externas con  $x = (0, a)$  e  $y = (0, b)$ , todo ello antes de producirse cualquier tipo de deformación.

Para el estudio de las placas se suele definir el plano medio de la placa como el plano equidistante entre ambas caras, de forma que el espesor es medido en dirección normal al plano medio. En todos los casos se considerará que la placa es simétrica respecto al plano medio, como corresponde a las tres placas estudiadas.

### 2.1.2 Deflexión estática de placas

Sean  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$ ,  $w(x, y, z)$  los desplazamientos en la placa respecto las coordenadas  $x, y, z$ , respectivamente, y sean  $\epsilon_{ij}$  y  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = x, y, z$ ) las componentes de los tensores de deformación y de esfuerzo, donde el primer subíndice indica la cara y el segundo la dirección en la que se aplica la deformación o el esfuerzo.

#### Hipótesis de Kirchhoff

Para abordar el estudio teórico de la deflexión de placas usaremos las hipótesis de Kirchhoff [126]:

- a) La deflexión del plano medio de la placa ( $w$ ) es pequeña comparada con el espesor ( $w \ll h$ ). Por tanto la pendiente de la superficie deflectada será muy pequeña  $\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} < 1\right)$  y su cuadrado será despreciable frente a la unidad  $\left(\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \ll 1\right)$ .
- b) El plano medio permanece indeformado tras la deflexión ( $u_0 = u(z = 0) = v_0 = v(z = 0) = 0$ ).
- c) Los planos normales al plano medio permanecen normales al plano medio tras la deflexión, por tanto las deformaciones verticales serán despreciables ( $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = \epsilon_z = 0$ ).
- d) Los esfuerzos normales al plano medio son pequeños comparados con otros esfuerzos y pueden ser despreciados ( $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_z \ll \sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ ).

Si la deformación es grande no se cumplirán las dos primeras hipótesis, mientras que si la placa es gruesa no se cumplirán las dos últimas [126].

#### Relación entre deformación y desplazamiento

Usando las hipótesis anteriores, la relación entre deformación y desplazamiento queda definida por las siguientes ecuaciones [126]

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{2.1a}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.1b)$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.1c)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.1d)$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (2.1e)$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (2.1f)$$

Definimos las curvaturas del plano medio respecto a los planos  $xz$ ,  $yz$ ,  $xy$  como [130]

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (2.2a)$$

$$\kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (2.2b)$$

$$\kappa_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2.2c)$$

De (2.1d) obtenemos que

$$w = w(x, y), \quad (2.3)$$

por tanto la deflexión solo depende de las coordenadas  $x$  e  $y$ .

De (2.1e) obtenemos que

$$u = \int \frac{\partial w}{\partial x} dz = -z \frac{\partial w}{\partial x} + u_0, \quad (2.4)$$

pero como  $u_0 = 0$ , usando (2.1a) y (2.2a), llegamos a

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = z \kappa_x. \quad (2.5)$$



De forma similar, de (2.1f)

$$v = \int \frac{\partial w}{\partial y} dz = -z \frac{\partial w}{\partial y} + v_0, \quad (2.6)$$

y usando (2.1b), (2.2b) y que  $v_0 = 0$ , llegamos a

$$\epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = z \kappa_y. \quad (2.7)$$

Finalmente, de (2.1c), y usando (2.4), (2.6) y (2.2c) obtenemos que

$$\epsilon_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = z \kappa_{xy}. \quad (2.8)$$

Las Ecuaciones (2.5), (2.7) y (2.8) representan las relaciones entre las deformaciones ( $\epsilon_{ij}$ ) y las curvaturas ( $\kappa_{ij}$ ).

### Ley de Hooke generalizada

Considerando la siguiente notación:

$$\sigma_1 = \sigma_x, \sigma_2 = \sigma_y, \sigma_3 = \sigma_z, \sigma_4 = \sigma_{yz}, \sigma_5 = \sigma_{xz}, \sigma_6 = \sigma_{xy},$$

$$\epsilon_1 = \epsilon_x, \epsilon_2 = \epsilon_y, \epsilon_3 = \epsilon_z, \epsilon_4 = \epsilon_{yz}, \epsilon_5 = \epsilon_{xz}, \epsilon_6 = \epsilon_{xy},$$

podemos expresar la ley de Hooke generalizada de la siguiente forma [130]:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} & Q_{15} & Q_{16} \\ & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} & Q_{25} & Q_{26} \\ & & Q_{33} & Q_{34} & Q_{35} & Q_{36} \\ & & & Q_{44} & Q_{45} & Q_{46} \\ & & & & Q_{55} & Q_{56} \\ & & & & & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Los términos no expresados son iguales a sus correspondientes simétricos.  $Q_{ij}$  son los términos del llamado tensor de rigidez ( $\mathbb{Q}$ ), que tiene 21 términos independientes por ser un tensor de  $6 \times 6$  simétrico.

Debido al tipo de ensayos que suelen hacerse para caracterizar al material, es interesante definir el tensor de flexibilidad  $\mathbb{S} = \mathbb{Q}^{-1}$ , ya que las componentes de  $\mathbb{S}$

se expresan fácilmente en términos de constantes ingenieriles. En términos de este tensor la relación entre tensión y deformación queda como [130]

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ & & & & S_{55} & S_{56} \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}. \quad (2.10)$$

Usando las hipótesis de Kirchhoff c) y d) podemos simplificar estas relaciones, obteniendo

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ & Q_{22} & Q_{26} \\ & & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix}, \quad (2.11)$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{26} \\ & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}, \quad (2.12)$$

o en notación contraída

$$\vec{\sigma} = \mathbb{Q} \vec{\epsilon}, \quad (2.13)$$

$$\vec{\epsilon} = \mathbb{S} \vec{\sigma}. \quad (2.14)$$

En el caso de un material ortótropo y usando el sistema de coordenadas local del material ( $x'-y'$ ), (2.12) se puede expresar en términos de sus constantes ingenieriles como

$$\begin{Bmatrix} \epsilon'_1 \\ \epsilon'_2 \\ \epsilon'_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & \frac{-\nu}{E_L} & 0 \\ & \frac{1}{E_T} & 0 \\ & & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{Bmatrix}, \quad (2.15)$$

siendo  $E_L$  el módulo de Young longitudinal a las fibras,  $E_T$  el módulo de Young transversal a las fibras,  $\nu$  el módulo de Poisson y  $G$  el módulo de cizalladura.

Invirtiendo el tensor obtenemos

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & 0 \\ & Q'_{22} & 0 \\ & & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon'_1 \\ \epsilon'_2 \\ \epsilon'_6 \end{Bmatrix}, \quad (2.16)$$

donde

$$Q'_{11} = \frac{E_L}{1 - \nu E_T/E_L}, \quad (2.17a)$$

$$Q'_{12} = \frac{\nu E_T}{1 - \nu E_T/E_L}, \quad (2.17b)$$

$$Q'_{22} = \frac{E_T}{1 - \nu E_T/E_L}, \quad (2.17c)$$

$$Q'_{66} = G. \quad (2.17d)$$

En el caso de materiales compuestos laminados, puesto que cada una de las capas es ortótropa, las Ecuaciones (2.15), (2.16) y (2.17) serán válidas para cada capa en el sistema de coordenadas local de cada una de ellas ( $x' - y'$ ).

Para materiales isótropos,  $E_L = E_T = E$  y  $G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$ .

### Propiedades del material en ejes rotados

Cuando el sistema de coordenadas global ( $x - y$ ) no coincide con el sistema de coordenadas local del material ( $x' - y'$ ) podemos calcular las tensiones, las deformaciones y el tensor de rigidez en un sistema conocidas las del otro. En el caso de las tensiones podemos transformarlas mediante el siguiente cambio de coordenadas [130]

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{Bmatrix}_{x'-y'} = \begin{bmatrix} (\cos\theta)^2 & (\sen\theta)^2 & 2\cos\theta\sen\theta \\ (\sen\theta)^2 & (\cos\theta)^2 & -2\cos\theta\sen\theta \\ -\cos\theta\sen\theta & \cos\theta\sen\theta & (\cos\theta)^2 - (\sen\theta)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_{x-y}, \quad (2.18)$$

o en notación contraída

$$\vec{\sigma}' = \mathbb{T} \vec{\sigma}, \quad (2.19)$$

siendo la transformación inversa

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_{x-y} = \begin{bmatrix} (\cos\theta)^2 & (\sen\theta)^2 & -2\cos\theta\sen\theta \\ (\sen\theta)^2 & (\cos\theta)^2 & 2\cos\theta\sen\theta \\ \cos\theta\sen\theta & -\cos\theta\sen\theta & (\cos\theta)^2 - (\sen\theta)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{Bmatrix}_{x'-y'}, \quad (2.20)$$

$$\vec{\sigma} = \mathbb{T}^{-1} \vec{\sigma}'. \quad (2.21)$$

En el caso de las deformaciones, el cambio de coordenadas es

$$\begin{Bmatrix} \epsilon'_1 \\ \epsilon'_2 \\ \epsilon'_6 \end{Bmatrix}_{x'-y'} = \begin{bmatrix} (\cos\theta)^2 & (\sen\theta)^2 & \cos\theta\sen\theta \\ (\sen\theta)^2 & (\cos\theta)^2 & -\cos\theta\sen\theta \\ -2\cos\theta\sen\theta & 2\cos\theta\sen\theta & (\cos\theta)^2 - (\sen\theta)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix}_{x-y}, \quad (2.22)$$

$$\vec{\epsilon}' = (\mathbb{T}^{-1})^T \vec{\epsilon}, \quad (2.23)$$

y su inversa

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix}_{x-y} = \begin{bmatrix} (\cos\theta)^2 & (\sen\theta)^2 & -\cos\theta\sen\theta \\ (\sen\theta)^2 & (\cos\theta)^2 & \cos\theta\sen\theta \\ 2\cos\theta\sen\theta & -2\cos\theta\sen\theta & (\cos\theta)^2 - (\sen\theta)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon'_1 \\ \epsilon'_2 \\ \epsilon'_6 \end{Bmatrix}_{x'-y'}, \quad (2.24)$$

$$\vec{\epsilon} = \mathbb{T}^T \vec{\epsilon}'. \quad (2.25)$$

Por último, encontraremos el cambio para transformar el tensor de rigidez. Expresando (2.11) en notación contraída para el sistema de coordenadas local del material ( $x' - y'$ ), y teniendo en cuenta (2.19) y (2.23)

$$\vec{\sigma}' = \mathbb{Q}' \vec{\epsilon}', \quad (2.26)$$

$$\mathbb{T} \vec{\sigma} = \mathbb{Q}' (\mathbb{T}^{-1})^T \vec{\epsilon}, \quad (2.27)$$

$$\vec{\sigma} = \mathbb{T}^{-1} \mathbb{Q}' (\mathbb{T}^{-1})^T \vec{\epsilon}, \quad (2.28)$$

definiendo

$$\mathbb{Q} = \mathbb{T}^{-1} \mathbb{Q}' (\mathbb{T}^{-1})^T, \quad (2.29)$$

obtenemos

$$\vec{\sigma} = \mathbb{Q} \vec{\epsilon}, \quad (2.30)$$

que es la ley de Hook para un sistema de coordenadas global  $(x - y)$ .

### Resultantes de esfuerzos: tensiones y momentos

Para estudiar problemas dominados por la flexión, en lugar de trabajar con el tensor de esfuerzos, es útil definir los siguientes resultantes de esfuerzos a lo largo del espesor [130]:

$$\left\{ \begin{array}{c} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{array} \right\} = \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x^{(k)} \\ \sigma_y^{(k)} \\ \sigma_{xy}^{(k)} \\ z\sigma_x^{(k)} \\ z\sigma_y^{(k)} \\ z\sigma_{xy}^{(k)} \\ \sigma_{xz}^{(k)} \\ \sigma_{yz}^{(k)} \end{array} \right\} dz, \quad (2.31)$$

donde  $N_x$ ,  $N_y$  y  $N_{xy}$  son las tensiones normales,  $Q_x$  y  $Q_y$  las tensiones cortantes,  $M_x$ ,  $M_y$  y  $M_{xy}$  los momentos flectores y el superíndice  $(k)$  denota cada una de las capas del material. Nótese que aunque  $\sigma_{xz}^{(k)}$  y  $\sigma_{yz}^{(k)}$  son pequeños,  $Q_x$  y  $Q_y$  no tienen por qué serlo. En la Figura 2.2 se esquematizan estas definiciones.

Asumiendo que (2.30) es válida para cada capa de la forma

$$\vec{\sigma}^{(k)} = \mathbb{Q}^{(k)} \vec{\epsilon}, \quad (2.32)$$

y usando las ecuaciones (2.4) y (2.6) junto a (2.1a), (2.1b) y a las seis primeras definiciones de (2.31), obtenemos [130]

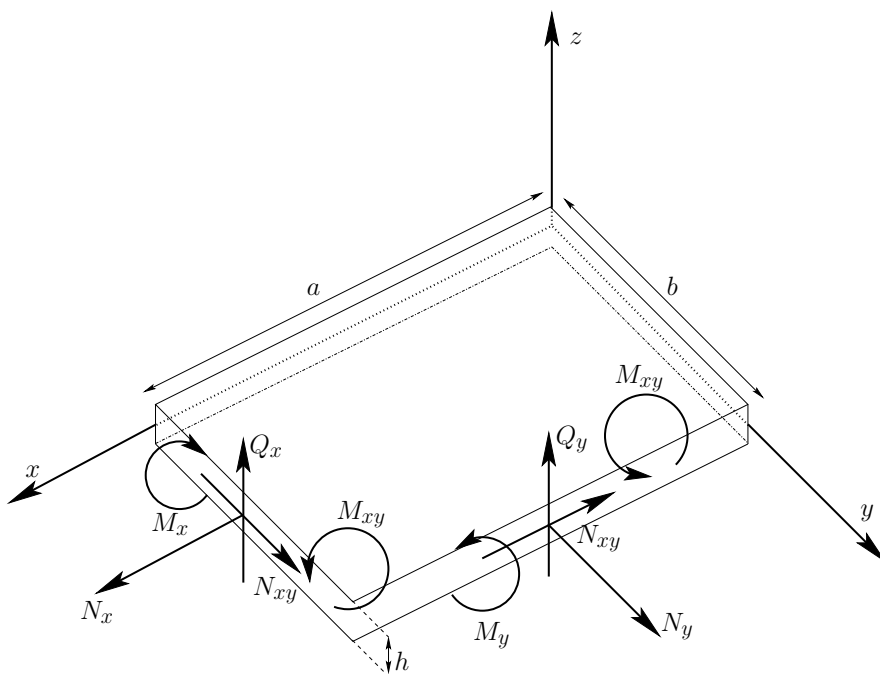


Figura 2.2: Resultantes de esfuerzos en la placa.

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{x0} \\ \epsilon_{y0} \\ \epsilon_{xy0} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

donde  $\epsilon_{x0} = \frac{\partial u_0}{\partial x}$ ,  $\epsilon_{y0} = \frac{\partial v_0}{\partial y}$ ,  $\epsilon_{xy0} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}$ , y

$$A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}^{(k)} dz, \quad (2.34)$$

$$B_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}^{(k)} z dz, \quad (2.35)$$

$$D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}^{(k)} z^2 dz. \quad (2.36)$$

Por la hipótesis de Kirchhoff b) sabemos que  $\epsilon_{x0} = \epsilon_{y0} = \epsilon_{xy0} = 0$ . Por otra parte, para placas simétricas respecto al plano medio,  $B_{ij} = 0$ , por tanto  $N_x = N_y = N_{xy} = 0$ , y nos queda

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ & D_{22} & D_{26} \\ & & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (2.37)$$

$$\vec{M} = \mathbb{D} \vec{\kappa}, \quad (2.38)$$

donde  $\mathbb{D}$  es el llamado tensor de rigidez a flexión de la placa.

Para placas ortótropas siempre podremos encontrar un sistema de coordenadas tal que  $D_{16} = D_{26} = 0$ , y para placas isótropas se cumple que

$$\begin{aligned} D_{11} = D_{22} = D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \\ D_{12} &= \nu D, \\ D_{66} &= \frac{(1-\nu)}{2} D. \end{aligned} \quad (2.39)$$

### Ecuaciones de gobierno de la placa

Supongamos una placa sometida a una deflexión estática mediante una carga por unidad de área  $p = p(x, y)$ . Consideremos un elemento infinitesimal de la placa de tamaño  $dx \times dy \times h$ . Al ser el elemento infinitesimal podemos considerar que la carga por unidad de área  $p$  está distribuida uniformemente y que, respecto a una traslación espacial, las tensiones y momentos cambian a lo largo del elemento infinitesimal como un desarrollo de Taylor truncado en primer orden. Por ejemplo, si en un lado del elemento infinitesimal tenemos un momento  $M_x$ , en el lado opuesto el momento será  $M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx$ , aplicado en sentido contrario para cumplir con las leyes de la estática. Además podemos considerar que las tensiones y momentos

resultantes están distribuidos de forma uniforme sobre el correspondiente lado o cara [126]. Esto queda esquematizado en la Figura 2.3.

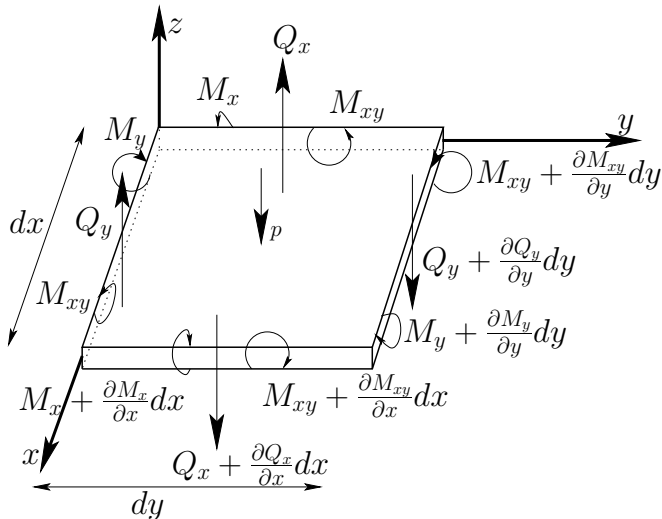


Figura 2.3: Elemento infinitesimal de placa con fuerzas y momentos aplicados.

Si aplicamos la condición de equilibrio estático de fuerzas ( $\sum \vec{F} = 0$ ) en la dirección perpendicular  $z$  sobre el elemento infinitesimal de placa, obtenemos

$$\begin{aligned} \left( Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy - Q_x dy + \left( Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx - Q_y dx + p dx dy &= 0, \\ \Rightarrow \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dx dy + p dx dy &= 0, \\ \Rightarrow \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p &= 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Si aplicamos la condición de equilibrio de momentos sobre el eje  $x$  obtenemos

$$\left( M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right) dy - M_{xy} dy + \left( M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right) dx - M_y dx - Q_y dx dy = 0,$$



$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_y}{\partial y} dx dy - Q_y dx dy &= 0, \\ \Rightarrow \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y &= 0. \end{aligned} \quad (2.41)$$

De forma similar, si aplicamos la condición de equilibrio para el eje  $y$  obtenemos

$$\begin{aligned} \left( M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy \right) dx - M_{xy} dx + \left( M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy - M_x dy - Q_x dy dx &= 0, \\ \Rightarrow \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dx dy + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx dy - Q_x dx dy &= 0, \\ \Rightarrow \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x &= 0. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Despejando  $Q_x$  y  $Q_y$  de (2.41) y (2.42), e introduciéndolos en (2.40), obtenemos

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p = 0. \quad (2.43)$$

Insertando (2.37) y (2.2) en (2.43), llegamos a [130]

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2(2D_{66} + D_{12}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} = p, \quad (2.44)$$

que es la ecuación de gobierno de una placa anisótropa simétrica respecto al plano medio.

Si la placa es ortótropa podemos encontrar un sistema de coordenadas tal que  $D_{16} = D_{26} = 0$ , y (2.44) queda como:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2(2D_{66} + D_{12}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = p. \quad (2.45)$$

Si la placa es isótropa se cumple (2.39), y (2.45) se convierte en:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) = D \nabla^4 w = p, \quad (2.46)$$

donde  $\nabla^4 = (\nabla^2)^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2$ , siendo  $\nabla^2$  el operador de Laplace.

### 2.1.3 Deflexión dinámica de placas

En el caso de considerar la deflexión de placas bajo una carga dinámica dependiente del tiempo  $p = p(x, y, t)$ , de forma que  $w = w(x, y, t)$ , basta con considerar la condición de equilibrio dinámico de fuerzas ( $\sum \vec{F} = m \vec{a}$ ), siendo  $m$  la masa y  $\vec{a}$  la aceleración [130]. Aplicado sobre el elemento infinitesimal de placa de la Figura 2.3,  $m = \rho h dx dy$  (siendo  $\rho$  la densidad del material) y  $\vec{a} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ , ya que solo consideramos desplazamientos en la dirección  $z$ . Por tanto, en este caso (2.40) será:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (2.47)$$

Considerando que la carga dinámica provoca desplazamiento vertical pero no el giro de la placa, las ecuaciones de equilibrio de momentos (2.41) y (2.42) permanecen iguales, por lo que de forma análoga a la deflexión estática, despejamos  $Q_x$  y  $Q_y$ , lo introducimos en (2.47), obteniendo

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (2.48)$$

Insertando (2.37) y (2.2) en (2.43), llegamos a

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2(2D_{66} + D_{12}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\ + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p, \end{aligned} \quad (2.49)$$

que es la ecuación de gobierno de una placa anisótropa simétrica respecto al plano medio bajo una carga dinámica.

Si la placa es ortótropa o isotrópica las ecuaciones se simplifican a

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2(2D_{66} + D_{12}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p, \quad (2.50)$$

$$D \nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p. \quad (2.51)$$

### 2.1.4 Cálculo de energías de la placa

#### Energía elástica

La energía elástica de deformación almacenada en un cuerpo elástico en un caso general de estrés se puede calcular mediante la expresión [130]

$$U = \frac{1}{2} \int \int \int_V (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \sigma_{xy} \epsilon_{xy} + \sigma_{xz} \epsilon_{xz} + \sigma_{yz} \epsilon_{yz}) dx dy dz, \quad (2.52)$$

donde la integral se extiende a todo el volumen del cuerpo.

En el caso de placas, usando la hipótesis de Kirchhoff c), (2.52) se simplifica a

$$U = \frac{1}{2} \int \int \int_V (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_{xy} \epsilon_{xy}) dx dy dz. \quad (2.53)$$

Desarrollando (2.11) para expresar los esfuerzos en función de las deformaciones, y usando las fórmulas (2.5), (2.7) y (2.8), (2.53) nos queda, expresada en función de  $w$ , como:

$$U = \frac{1}{2} \int \int \int_V z^2 \left[ Q_{11}^{(k)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + Q_{22}^{(k)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4Q_{66}^{(k)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right. \\ \left. + 2Q_{12}^{(k)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4Q_{16}^{(k)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 4Q_{26}^{(k)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] dx dy dz. \quad (2.54)$$

Integrando sobre el espesor y usando (2.36):

$$U = \frac{1}{2} \int \int_A \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right. \\ \left. + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 4D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] dx dy. \quad (2.55)$$

Asumimos que la energía elástica cumple con el principio de superposición, de forma que podemos calcular de forma independiente la energía elástica de distintas áreas de la placa ( $A^k$ ) con diferente espesor o diferentes propiedades mecánicas,

siendo la energía elástica total:

$$\begin{aligned}
 U = \sum_k \frac{1}{2} \int \int_{A^k} & \left( D_{11}^k \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_{22}^k \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66}^k \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right. \\
 & \left. + 2D_{12}^k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4D_{16}^k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 4D_{26}^k \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy,
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

donde el índice  $k$  denota las distintas áreas de la placa ( $A^k$ ).

Esta fórmula nos permite calcular la energía elástica de deformación de una placa con áreas diferenciadas, por ejemplo, áreas con diferentes espesores o con diferentes constantes ingenieriles (como correspondería a un defecto de rigidez).

Haciendo las aproximaciones usuales para los casos de placa ortótropa e isótropa, se obtiene que [130]:

$$\begin{aligned}
 U = \sum_k \frac{1}{2} \int \int_{A^k} & \left[ D_{11}^k \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_{22}^k \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\
 & \left. + 4D_{66}^k \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2D_{12}^k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dx dy,
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

$$\begin{aligned}
 U = \sum_k \frac{1}{2} \int \int_{A^k} & D^k \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\
 & \left. + 2(1 - \nu^k) \left( \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] dx dy.
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

### Energía cinética

En cuanto a la energía cinética, para un cuerpo elástico se puede calcular como [130]

$$T = \frac{1}{2} \int \int \int_V \rho \left( \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) dx dy dz, \tag{2.59}$$

donde  $\rho$  es la densidad del material.

En el caso de placas, introduciendo (2.4) y (2.6) en (2.59), y la hipótesis de Kirchhoff b), se obtiene que

$$T = \frac{1}{2} \int \int \int_V \rho \left( \left( -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 + \left( -z \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) dx dy dz. \quad (2.60)$$

Usando la hipótesis de Kirchhoff a), despreciamos los términos con derivadas espaciales frente al término con derivada temporal, con lo que obtenemos

$$T = \frac{1}{2} \int \int \int_V \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy dz, \quad (2.61)$$

y puesto que  $w = w(x, y, t)$ , podemos integrar sobre la coordenada  $z$ , con lo que

$$T = \frac{1}{2} \int \int_A \rho h \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy, \quad (2.62)$$

siendo  $h$  el espesor.

Asumiendo que la energía cinética también cumple con el principio de superposición, podemos calcular la energía cinética total de una placa con zonas diferenciadas en densidad y espesor como

$$T = \frac{1}{2} \sum_k \int \int_{A^k} \rho^k h^k \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy, \quad (2.63)$$

donde el índice  $k$  denota las distintas áreas de la placa ( $A^k$ ).

## 2.2 El método de Ritz

El método de Ritz (incorrectamente llamado método de Rayleigh-Ritz por numerosos autores [82]) es un método semianalítico que nos proporciona una solución aproximada a problemas de vibraciones libres, esto es, mediante su uso se pueden obtener las frecuencias principales y los modos de vibración de la placa. También es aplicable a problemas de flexión estática y de pandeo, que no serán estudiados en esta Memoria. El método fue definido por Ritz [115, 116], y posteriormente usado en varios trabajos clásicos [12–16, 81, 134]. Más recientemente, el método se ha aplicado a modelos de placa de alto orden [50, 83, 120, 138], a placas con diferentes geometrías [29, 39, 70, 122], al estudio del amortiguamiento [25, 26, 89] o

a placas con daño, bien sea por agujero [17, 19, 56, 78, 80, 117], por masa añadida [19, 37, 38, 44, 79, 117], o por cambio en la rigidez [19, 56].

El método está basado en el principio de la Mecánica de Hamilton, que establece que, en el equilibrio, la diferencia entre las energías  $U$  y  $T$  debe ser un mínimo. Puesto que el problema a abordar es el de vibraciones libres, podemos eliminar la derivada temporal de (2.63) asumiendo que

$$w(x, y, t) = w(x, y)e^{i\omega t}, \quad (2.64)$$

siendo  $\omega$  la frecuencia angular. Con esto, (2.63) nos queda como

$$T = \frac{1}{2} \sum_k \int \int_{A^k} \rho^k h^k \omega^2 w^2 dx dy. \quad (2.65)$$

De esta forma, partiendo de las ecuaciones (2.56) y (2.65), observamos en primer lugar que  $U$  y  $T$  solo dependen de  $w(x, y)$ . Por tanto, asumimos una solución para  $w(x, y)$  de la forma

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} X_m(x) Y_n(y), \quad (2.66)$$

siendo  $X_m(x)$ ,  $Y_n(y)$  funciones compatibles con las condiciones de contorno,  $M$ ,  $N$  el número de términos de los sumatorios y  $A_{mn}$  un conjunto de parámetros.

Si expresamos (2.56) y (2.65) usando (2.66), observamos que las únicas variables en el sistema son los parámetros  $A_{mn}$ . Por tanto, para hallar los mínimos que proporcionan las condiciones de equilibrio anteriormente mencionadas, debemos derivar respecto a estos parámetros e imponer la condición

$$\frac{\partial(U - T)}{\partial A_{mn}} = 0. \quad (2.67)$$

Introduciendo (2.56) y (2.65) en (2.67), junto a (2.66), obtenemos la siguiente expresión:

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left\{ \sum_k \int \int_{A^k} \left( D_{11}^k \frac{d^2 X_i}{dx^2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} Y_j Y_n + D_{22}^k X_i X_m \frac{d^2 Y_j}{dy^2} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \right) \right.$$

$$\begin{aligned}
 & +D_{12}^k \left( \frac{d^2 X_i}{dx^2} X_m Y_j \frac{d^2 Y_n}{dy^2} + X_i \frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{d^2 Y_j}{dy^2} Y_n \right) + 4D_{66}^k \frac{dX_i}{dx} \frac{dX_m}{dx} \frac{dY_j}{dy} \frac{dY_n}{dy} \\
 & + 2D_{16}^k \left( \frac{d^2 X_i}{dx^2} \frac{dX_m}{dx} Y_j \frac{dY_n}{dy} + \frac{dX_i}{dx} \frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{dY_j}{dy} Y_n \right) \\
 & + 2D_{26}^k \left( \frac{dX_i}{dx} X_m \frac{dY_j}{dy} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} + X_i \frac{dX_m}{dx} \frac{d^2 Y_j}{dy^2} \frac{dY_n}{dy} \right) \Big) dx dy \\
 & - \sum_k \int \int_{A^k} \rho^k h^k \omega^2 X_i X_m Y_j Y_n dx dy \Big\} A_{ij} = 0; \\
 & \qquad m = 1, \dots, M; \quad n = 1, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

Si analizamos la expresión (2.68) podemos observar que se trata de un sistema de ecuaciones de tamaño  $M \times N$ , siendo  $A_{ij}$  las incógnitas. Expresado en forma matricial, el sistema de ecuaciones queda como

$$(\mathbb{K} - \mathbb{M}\omega^2) A_{ij} = 0. \tag{2.69}$$

Si multiplicamos por la izquierda por  $\mathbb{M}^{-1}$  y llamamos  $\mathbb{H} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{K}$  y  $\lambda = \omega^2$ , nos queda que

$$(\mathbb{H} - \mathbb{I}\lambda) A_{ij} = 0, \tag{2.70}$$

siendo  $\mathbb{I}$  la Matriz Identidad.

Este sistema de ecuaciones será, por un lado, homogéneo, y por otro, compatible determinado. Por tanto, solo tendrá soluciones distintas de la trivial para un conjunto discreto de valores de  $\lambda$  ( $\lambda_l$ ) que hacen que el determinante de la matriz de coeficientes sea igual a cero, haciendo de esta forma que el sistema sea compatible indeterminado. Esto es:

$$|\mathbb{H} - \mathbb{I}\lambda_l| = 0, \tag{2.71}$$

siendo posible encontrar para cada  $\lambda_l$  un conjunto distinto de  $A_{ij}$ . El problema es, por tanto, formalmente análogo a un problema de autovalores.

Las funciones  $X_m(x)$ ,  $Y_n(y)$ , como se ha comentado, deben ser compatibles con las condiciones de contorno. Hay múltiples opciones para elegir estas funciones [27, 28, 30, 49, 50, 65, 75, 87, 134, 136–138], siendo la elección más usada las llamadas

funciones viga clásicas [30,134]. En contraposición a ellas, que presentan problemas numéricos por el uso de funciones hiperbólicas, en este trabajo se han usado las funciones propuestas por Gartner [65]:

$$X_m(x) = A_m \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) + B_m \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) + C_m e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} + D_m e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}}, \quad (2.72)$$

$$Y_n(y) = A_n \cos\left(\frac{\gamma_n y}{b}\right) + B_n \sin\left(\frac{\gamma_n y}{b}\right) + C_n e^{-\frac{\gamma_n y}{b}} + D_n e^{-\frac{\gamma_n(b-y)}{b}}, \quad (2.73)$$

donde  $a$  y  $b$  son los lados de la placa, y  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$  y  $\gamma_i$  son parámetros dependientes de las condiciones de contorno.

A modo de ejemplo, y puesto que es el caso más usado a lo largo de esta Memoria, se calcularán estos parámetros para el caso de una **placa empotrada en sus cuatro lados**. En primer lugar, proponemos una función del tipo:

$$f_i(x) = A_i \cos\left(\frac{\gamma_i x}{l}\right) + B_i \sin\left(\frac{\gamma_i x}{l}\right) + C_i e^{-\frac{\gamma_i x}{l}} + D_i e^{-\frac{\gamma_i(l-x)}{l}}, \quad (2.74)$$

cuya derivada será:

$$f'_i(x) = \frac{\gamma_i}{l} \left( -A_i \sin\left(\frac{\gamma_i x}{l}\right) + B_i \cos\left(\frac{\gamma_i x}{l}\right) - C_i e^{-\frac{\gamma_i x}{l}} + D_i e^{-\frac{\gamma_i(l-x)}{l}} \right), \quad (2.75)$$

siendo  $l$  un lado de la placa.

En primer lugar imponemos que, para placa empotrada

$$A_i = 1. \quad (2.76)$$

La condición de empotramiento induce cuatro condiciones sobre cada lado de la placa, de forma que:

$$f_i(0) = 0 \Rightarrow 1 + C_i + D_i e^{-\gamma_i} = 0, \quad (2.77a)$$

$$f'_i(0) = 0 \Rightarrow B_i - C_i + D_i e^{-\gamma_i} = 0, \quad (2.77b)$$

$$f_i(l) = 0 \Rightarrow \cos(\gamma_i) + B_i \sin(\gamma_i) + C_i e^{-\gamma_i} + D_i = 0, \quad (2.77c)$$

$$f'_i(l) = 0 \Rightarrow -\sin(\gamma_i) + B_i \cos(\gamma_i) - C_i e^{-\gamma_i} + D_i = 0. \quad (2.77d)$$



Si restamos (2.77a) y (2.77b):

$$1 + 2C_i - B_i = 0 \Rightarrow B_i = 1 + 2C_i \Rightarrow C_i = \frac{B_i - 1}{2}, \quad (2.78)$$

mientras que si las sumamos, obtenemos:

$$1 + 2D_i e^{-\gamma_i} + B_i = 0 \Rightarrow B_i = -(1 + 2D_i e^{-\gamma_i}) \Rightarrow D_i = -\frac{B_i + 1}{2e^{-\gamma_i}}. \quad (2.79)$$

Por otra parte, restando (2.77c) y (2.77d):

$$\begin{aligned} B_i \sin(\gamma_i) + \sin(\gamma_i a) - B_i \cos(\gamma_i) + \cos(\gamma_i) + B_i e^{-\gamma_i} - e^{-\gamma_i} &= 0, \\ \Rightarrow B_i &= -\frac{\sin(\gamma_i) + \cos(\gamma_i) - e^{-\gamma_i}}{\sin(\gamma_i) - \cos(\gamma_i) + e^{-\gamma_i}}, \end{aligned} \quad (2.80)$$

y sumándolos:

$$\begin{aligned} B_i \sin(\gamma_i) - \sin(\gamma_i) + B_i \cos(\gamma_i) + \cos(\gamma_i) - (B_i + 1)e^{\gamma_i} &= 0, \\ \Rightarrow B_i &= \frac{\sin(\gamma_i) - \cos(\gamma_i) + e^{\gamma_i}}{\sin(\gamma_i) + \cos(\gamma_i) - e^{\gamma_i}}. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Igualando (2.81) y (2.80), simplificando y despejando  $\cos(\gamma_i)$ :

$$\cos(\gamma_i) = \frac{2}{e^{\gamma_i} + e^{-\gamma_i}} \Rightarrow \cos(\gamma_i) = \frac{2e^{-\gamma_i}}{1 + e^{-2\gamma_i}}. \quad (2.82)$$

Esta función será la llamada función característica, que define los valores de  $\gamma_i$  para una condición de contorno dada.

Definimos ahora el ángulo  $\delta_i$  de forma que  $\gamma_i = \frac{2i+1}{2}\pi + \delta_i$ , y sea  $n$  un número entero:

- Si  $i$  es impar ( $i = 2n - 1$ )

$$\cos(\gamma_i) = \cos\left(\frac{2i+1}{2}\pi + \delta_i\right) = \cos\left(\frac{4n-1}{2}\pi + \delta_i\right) = \sin(\delta_i), \quad (2.83a)$$

$$\sin(\gamma_i) = \sin\left(\frac{2i+1}{2}\pi + \delta_i\right) = \sin\left(\frac{4n-1}{2}\pi + \delta_i\right) = -\cos(\delta_i). \quad (2.83b)$$

- Si  $i$  es par ( $i = 2n$ )

$$\cos(\gamma_i) = \cos\left(\frac{2i+1}{2}\pi + \delta_i\right) = \cos\left(\frac{4n+1}{2}\pi + \delta_i\right) = -\sin(\delta_i), \quad (2.84a)$$

$$\sin(\gamma_i) = \sin\left(\frac{2i+1}{2}\pi + \delta_i\right) = \sin\left(\frac{4n+1}{2}\pi + \delta_i\right) = \cos(\delta_i). \quad (2.84b)$$

De (2.83a) y (2.84a) concluimos que:

$$\cos(\gamma_i) = -(-1)^i \sin(\delta_i), \quad (2.85)$$

y de (2.83b) y (2.84b) concluimos que:

$$\sin(\gamma_i) = (-1)^i \cos(\delta_i). \quad (2.86)$$

Si insertamos (2.85) y (2.86) en (2.80) obtenemos

$$B_i = \frac{\sin(\delta_i) - \cos(\delta_i) + (-1)^i e^{-\gamma_i}}{\sin(\delta_i) + \cos(\delta_i) + (-1)^i e^{-\gamma_i}}. \quad (2.87)$$

Por otra parte, si insertamos (2.85) en (2.82) obtenemos que

$$\sin(\delta_i) = -\frac{(-1)^i 2e^{-\gamma_i}}{1 + e^{-2\gamma_i}}, \quad (2.88)$$

con lo que

$$\cos(\delta_i) = \sqrt{1 - \sin^2(\delta_i)} = \frac{1 - e^{-2\gamma_i}}{1 + e^{-2\gamma_i}}. \quad (2.89)$$

Usando (2.88) y (2.89) en (2.87)

$$B_i = -\frac{1 + (-1)^i e^{-\gamma_i}}{1 - (-1)^i e^{-\gamma_i}}. \quad (2.90)$$

Insertando (2.90) en (2.78) obtenemos que

$$C_i = \frac{B_i - 1}{2} = -\frac{1}{1 - (-1)^i e^{-\gamma_i}}. \quad (2.91)$$

Finalmente, insertando (2.90) en (2.79) obtenemos que

$$D_i = -\frac{B_i + 1}{2e^{-\gamma_i}} = \frac{(-1)^i}{1 - (-1)^i e^{-\gamma_i}}. \quad (2.92)$$

Las ecuaciones (2.82), (2.76), (2.90), (2.91) y (2.92) proporcionan los parámetros necesarios en (2.74) para el caso de una placa empotrada en sus cuatro lados.

Una vez calculadas las constantes para la condición de contorno deseada, quedan definidas las funciones, y definiendo el número de términos de los sumatorios  $M$  y  $N$  (generalmente, y a lo largo de toda esta Memoria,  $M = N$ ), podemos calcular los términos de las matrices  $\mathbb{K}$  y  $\mathbb{M}$  mediante el cálculo de las integrales (2.68). La implementación llevada a cabo para calcular estas integrales se detalla en el Apéndice B, así como los valores de las constantes para diversas condiciones de contorno.

Calculadas las matrices  $\mathbb{K}$  y  $\mathbb{M}$  podemos resolver el problema de autovalores. De esta resolución obtendremos  $M \times N$  valores de  $\lambda$  (a partir de los cuales podremos calcular las frecuencias naturales  $f_i$ ). A cada valor de  $\lambda$  corresponderá una solución del sistema de ecuaciones, cuyas incógnitas eran las  $A_{mn}$ , de forma que introduciendo dichas  $A_{mn}$  en (2.66) junto a las funciones correspondientes (2.74) y sus parámetros calculados mediante (2.82), (2.76), (2.90) y (2.91), obtenemos el modo de vibración correspondiente a la frecuencia  $f_i$ .

## 2.3 El Método de los Elementos Finitos (FEM)

El Método de los Elementos Finitos [71, 114, 140, 141] (conocido por FEM por sus iniciales en inglés) es un método para la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales definidas sobre un cuerpo continuo. El método divide el dominio del cuerpo en un número de subdominios llamados elementos finitos. Dentro de cada elemento existen una serie de puntos llamados nodos, de forma que un nodo sobre la frontera puede pertenecer a varios elementos. El conjunto de nodos sobre el elemento es llamado malla. Sobre cada nodo son definidas un número de variables denominadas grados de libertad.

De esta forma, sobre cada uno de los elementos se plantean las ecuaciones diferenciales parciales, y mediante el uso de las llamadas funciones de interpolación se llega a unas ecuaciones que relacionan el comportamiento del elemento con los valores de los grados de libertad en los nodos. Posteriormente se ensamblan las

ecuaciones de cada uno de los elementos, formando un conjunto de ecuaciones algebraicas cuya resolución nos proporciona los valores de los grados de libertad en los nodos.

En Mecánica Estructural el comportamiento del elemento estará definido por las matrices de rigidez ( $\mathbb{K}$ ), masa ( $\mathbb{M}$ ) y amortiguamiento ( $\mathbb{C}$ ), además de por la funciones de interpolación.

Desde un punto de vista práctico, típicamente una simulación FEM consta de tres fases:

- **El preproceso:** consiste en la generación de la malla, las condiciones de contorno, la definición de los materiales y asignación de sus propiedades, etc.
- **El cálculo:** en problemas no-dependientes del tiempo, a partir de los datos proporcionados en el preproceso se puede obtener un problema de álgebra lineal con  $N$  incógnitas (número de grados de libertad de cada nodo  $\times$  número de nodos), resoluble mediante un algoritmo computacional. En problemas dependientes del tiempo a veces el cálculo consiste en una sucesión finita de sistemas de  $N$  ecuaciones y  $N$  incógnitas que deben resolverse uno a continuación de otro, y cuya entrada depende del resultado del paso anterior.
- **Postproceso:** típicamente el cálculo proporciona valores de ciertas variables en los nodos de la malla. Sin embargo, típicamente los programas de simulación FEM proporcionan una inmensa cantidad de información que debe ser recogida y tratada convenientemente.

En el trabajo presentado en esta Memoria el preproceso y el cálculo se han llevado a cabo mediante el programa FEAP [125], mientras el postproceso se ha realizado con programas propios desarrollados específicamente. Si bien FEAP es un programa ampliamente usado en investigación en el campo de la Mecánica Computacional, presenta el inconveniente de tener una documentación un tanto pobre, donde por ejemplo no se especifican con claridad las funciones de interpolación usadas en los elementos predefinidos.

El elemento usado ha sido en todos los casos un elemento predefinido en el programa, llamado SHELL, que usa la teoría de Kirchoff y por tanto las ecuaciones descritas en las secciones anteriores.

Los tipos de simulaciones que se han llevado a cabo han sido dos:

- **Simulación modal**, para obtener las frecuencias principales y los modos de vibración.
- **Simulación transitoria**, para obtener la respuesta a lo largo del tiempo a una excitación temporal.

Las simulaciones modales se basan en unos principios parecidos a los vistos anteriormente mediante el método de Ritz, ya que se trata de resolver el problema de autovalores

$$(\mathbb{K} - \mathbb{M}\omega^2) \mathbb{N} = 0, \quad (2.93)$$

siendo  $\mathbb{N}$  el vector de incógnitas compuesto por los grados de libertad de los nodos.

En cuanto a las simulaciones transitorias, si bien el manual de FEAP no explica cómo son llevadas a cabo, lo usual es que consistan en una serie de simulaciones estáticas consecutivas para cada valor puntual de la fuerza en un momento de tiempo dado. Cada simulación estática será un problema del tipo

$$\mathbb{K}\mathbb{U} + \mathbb{C}\dot{\mathbb{U}} + \mathbb{M}\ddot{\mathbb{U}} = \mathbb{F}, \quad (2.94)$$

siendo  $\mathbb{U}$  el vector de desplazamientos modales y  $\mathbb{F}$  la fuerza aplicada.



## Capítulo 3

# Descripción del experimento

### 3.1 Descripción general

A lo largo de este trabajo se realizaron experimentos de vibraciones sobre placas rectangulares consistentes en hacerlas vibrar con una excitación conocida accionada por un actuador piezoeléctrico (PZT) [47,100,107] y medir su respuesta vibracional en varios puntos mediante sensores piezoeléctricos, como queda esquematizado en la Figura 3.1.

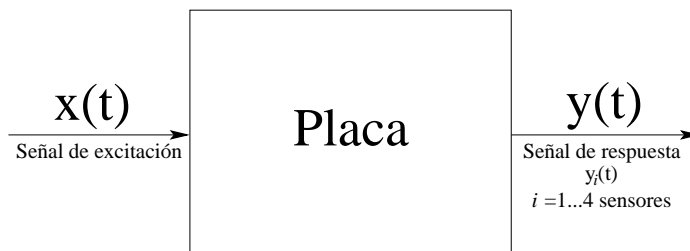


Figura 3.1: Esquema general del experimento.

Se ensayaron tres tipos de placas:

- Placa Aluminio (Figura 3.2): Placa de aluminio con espesor uniforme de aproximadamente 2.86 mm.
- Placa CFRP1 (Figura 3.3): Placa de material compuesto laminado con espesor uniforme de aproximadamente 2.1 mm.

- Placa CFRP2 (Figura 3.4): Placa de material compuesto laminado con dos zonas diferenciadas en espesor, aproximadamente de 5.394 mm y 3.828 mm respectivamente.

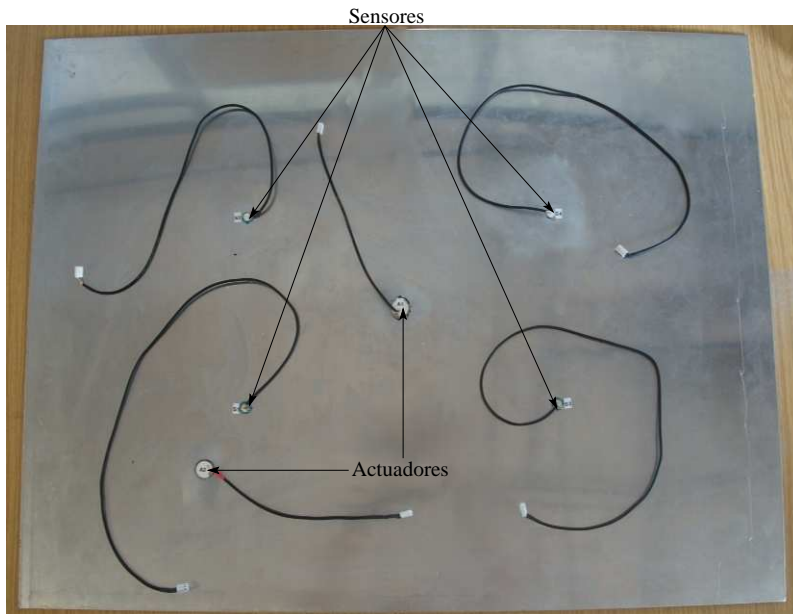


Figura 3.2: Placa Aluminio instrumentada con dos actuadores y cuatro sensores PZT.

En las tres figuras se pueden observar las placas ya instrumentadas. Las placas se excitaron con señales de vibración aleatorias tipo ruido blanco con un ancho de banda de 0 a 1600 Hz, y con señales senoidales de diferentes frecuencias. Para la mayoría de los ensayos las condiciones de contorno fueron empotradas en los cuatro lados de la placa, lo cual se implementó mediante un marco rígido de acero con pares tornillo-tuerca apretados con un torque de 60 N·m en el caso de las placas Aluminio y CFRP1, y 20 N·m en el caso de la placa CFRP2. Con las placas Aluminio y CFRP1 también se realizaron ensayos en condiciones de placa cuasilibre, apoyando el centro de la placa sobre una esponja blanda, dejando así sus cuatro lados libres.

Como sistema de generación y adquisición de señales se usó un equipo PULSE de Brüel & Kjær® [111]. Para conseguir vibraciones de excitación altas, la amplitud



### 3.1. Descripción general

---

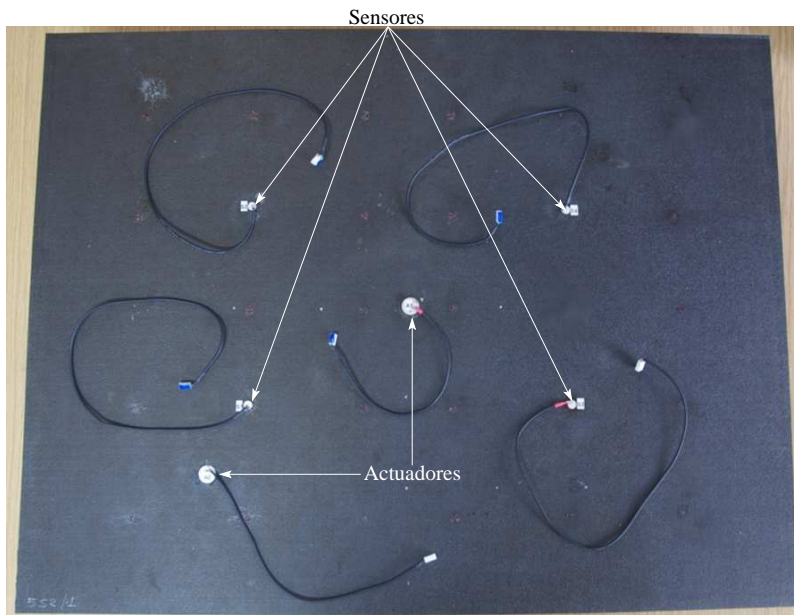


Figura 3.3: Placa CFRP1 instrumentada con dos actuadores y cuatro sensores PZT.



Figura 3.4: Placa CFRP2 instrumentada con un actuador y cuatro sensores PZT.

de la señal generada por el equipo PULSE se amplificó por veinte mediante un amplificador EPA-104 de Piezsystem® [1], antes de ser aplicada al actuador. Para conectar los sensores y actuadores PZT al equipo PULSE se utilizaron varias cajas de conexión elaboradas por el Grupo de Investigación [47].

Por otro lado, con objeto de minimizar el ruido eléctrico, tanto el ambiental como el proveniente de la red, se adoptaron las siguientes medidas:

- Todos los equipos, cajas de conexión, apantallamientos de cables y el marco de acero se conectaron a un sistema de tierra independiente de la red eléctrica.
- Las medidas se realizaron en modo diferencial, registrando el voltaje de cada electrodo del PZT por separado y restándolos al procesar la señal. Con este método de medida se elimina parte del ruido eléctrico ya que este es igual en las señales de cada electrodo.

Para reducir la influencia de las vibraciones externas se realizaron las medidas de noche, de forma que el ruido ambiental fuera mínimo.

En la Figura 3.5 podemos observar una imagen completa del experimento y en la Figura 3.6 un esquema de las conexiones (que luego serán detalladas en la sección 3.7).

## 3.2 Descripción de las placas

### Placa Aluminio

La placa Aluminio fue suministrada por la empresa EADS-CASA en El Puerto de Santa María, y sus propiedades se pueden ver en la Tabla 3.1. Se trata de una placa de aluminio, y por tanto, isótropa. Las constantes ingenieriles  $E$ ,  $\nu$  y  $G$  se suponen las del aluminio (obtenidas de la bibliografía), mientras que la masa y las dimensiones han sido medidas en el laboratorio, excepto el espesor que presentaba dificultades para medirlo con precisión, ya que no era perfectamente uniforme y además la placa estaba ligeramente combada. El espesor y la densidad considerados han sido obtenidos mediante el procedimiento explicado en la Sección 4.1.1, mientras el coeficiente de amortiguamiento fue medido en el laboratorio según lo explicado en la Sección 4.2.1.

### 3.2. Descripción de las placas

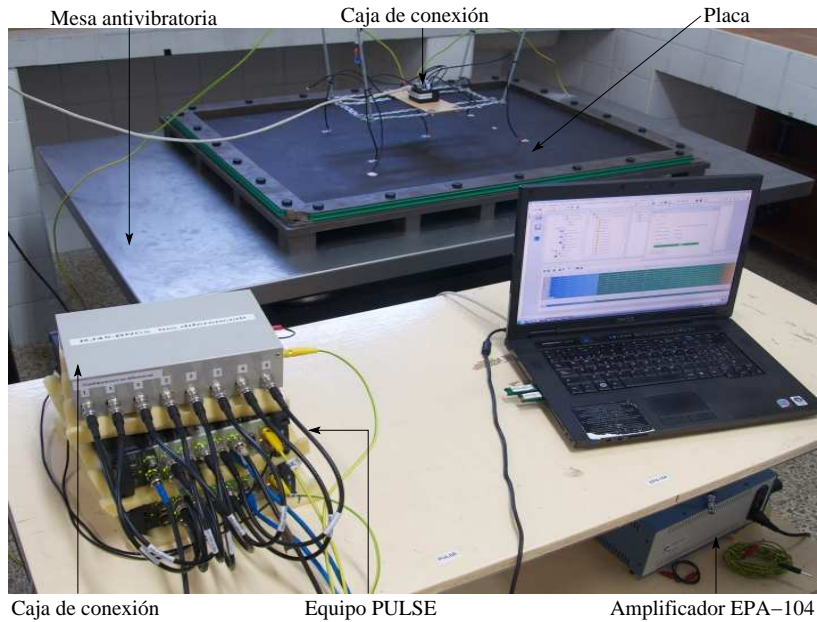


Figura 3.5: Imagen completa del experimento.

Placa Aluminio

Longitud total del lado largo ( $a_t$ )	88.9 cm
Longitud total del lado corto ( $b_t$ )	69.1 cm
Longitud de empotramiento del lado largo ( $a$ )	85 cm
Longitud de empotramiento del lado corto ( $b$ )	65 cm
Módulo de Young ( $E$ )	$7.0 \times 10^{10}$ Pa
Módulo de Poisson ( $\nu$ )	0.33
Módulo de cizalladura ( $G$ )	$2.63 \times 10^{10}$ Pa
Masa ( $m$ )	4.75 kg
Densidad ( $\rho$ )	$2703.6 \text{ kg/m}^3$
Espesor ( $h$ )	2.86 mm
Coefficiente de amortiguamiento ( $\xi$ )	0.0027

Tabla 3.1: Propiedades físicas de la placa Aluminio.

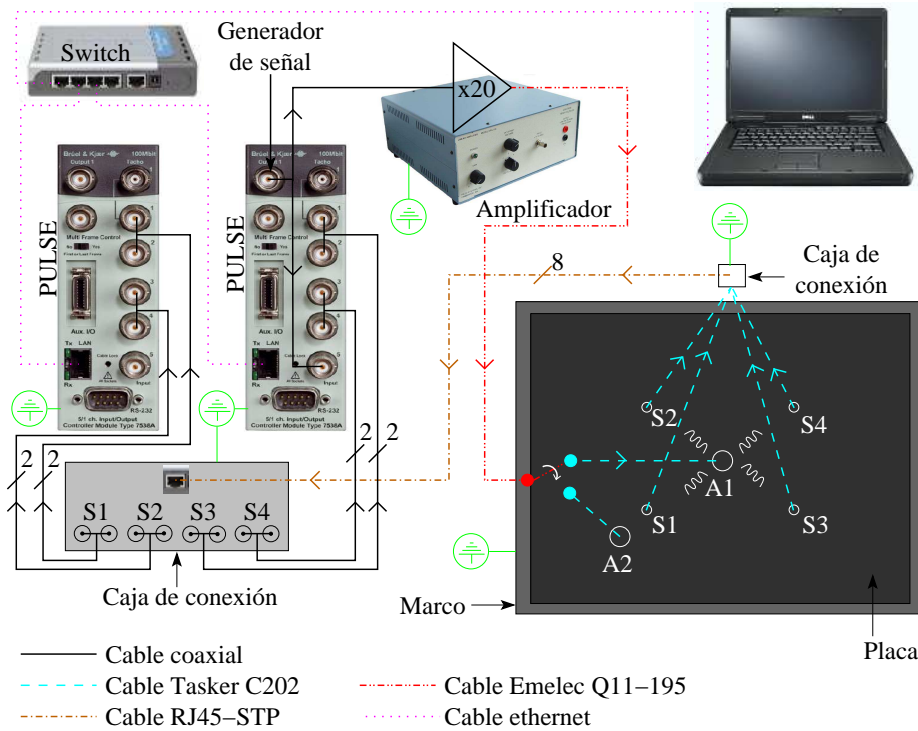


Figura 3.6: Esquema de conexiones del experimento.

### Placa CFRP1

La placa CFRP1 fue fabricada en el Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial (INTA), en Madrid. Se usó un material con referencia Hexply® M21/194/34/T800, esto es, con una matriz epoxy de tipo M21 y unas fibras de carbono de tipo T800, siguiendo un ciclo de curado H0820, de seis horas. En la Figura 3.7 se puede observar la placa CFRP1 a la salida del autoclave, una vez finalizado el ciclo de curado. Sus propiedades se pueden ver en la Tabla 3.2. Se trata de una placa ortótropa ya que todas las capas de fibras se encuentran a  $0^\circ/90^\circ$ . Las constantes ingenieriles  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $\nu$  y  $G$  fueron medidas en el INTA mediante la fabricación de probetas unidireccionales y diferentes ensayos mecánicos, mientras que la masa y las dimensiones han sido medidas en el laboratorio, excepto el espesor que presentaba dificultades para medirlo con precisión, ya que una de las caras de la placa presentaba una rugosidad no despreciable. El espesor y la densidad considerados han sido obteni-

### 3.2. Descripción de las placas

---

dos mediante el procedimiento explicado en la Sección 4.1.1, mientras el coeficiente de amortiguamiento fue medido en el laboratorio según lo explicado en la Sección 4.2.1.

Placa CFRP1

Longitud total del lado largo ( $a_t$ )	87.9 cm
Longitud total del lado corto ( $b_t$ )	67.6 cm
Longitud de empotramiento del lado largo ( $a$ )	85 cm
Longitud de empotramiento del lado corto ( $b$ )	65 cm
Módulo de Young longitudinal a las fibras ( $E_L$ )	$1.50 \times 10^{11}$ Pa
Módulo de Young transversal a las fibras ( $E_T$ )	$1.15 \times 10^{10}$ Pa
Módulo de Poisson ( $\nu$ )	0.42
Módulo de cizalladura ( $G$ )	$5 \times 10^9$ Pa
Masa ( $m$ )	2.115 kg
Densidad ( $\rho$ )	$1727 \text{ kg/m}^3$
Número de capas	12
Espesor de cada capa ( $h_i$ )	0.175 mm
Espesor total ( $h$ )	2.1 mm
Orientación de las fibras	$[0/90]_{3S}$
Coefficiente de amortiguamiento ( $\xi$ )	0.0037

Tabla 3.2: Propiedades físicas de la placa CFRP1.

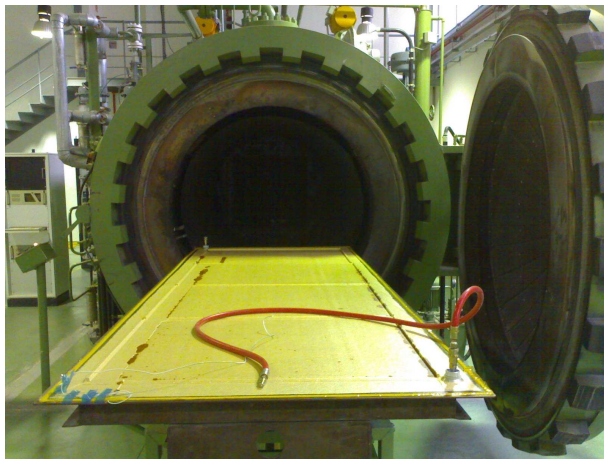


Figura 3.7: Placa CFRP1 a la salida del autoclave.

## Placa CFRP2

La placa CFRP2 fue fabricada por la empresa EADS-CASA en El Puerto de Santa María, usando el material preimpregnado Z19.780 y el ciclo de curado 22, de seis horas y media. Sus propiedades se pueden ver en la Tabla 3.3. Se trata de una placa cuasi-ortótropa, con un pequeño grado de anisotropía, ya que tiene algunas capas a  $45^\circ$  y  $-45^\circ$ . Las constantes ingenieriles  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $\nu$  y  $G$  fueron proporcionadas por la empresa EADS-CASA. Presenta dos zonas con diferente espesor en la dirección de su lado más largo. Para conseguir que tuviera dos espesores, se eliminaron ciertas capas de la parte delgada antes del ciclo de curado. En la Figura 3.8 se puede observar el perfil no a escala de la placa en la zona de cambio de espesor. Al presentar una rugosidad no despreciable en una de las caras (al igual que la placa CFRP1), los espesores y la densidad considerados han sido obtenidos mediante el procedimiento explicado en la Sección 4.1.1, tomando como parámetro de ajuste el espesor de cada capa y teniendo en cuenta el número de capas en cada zona. El coeficiente de amortiguamiento fue medido en el laboratorio según lo explicado en la Sección 4.2.1.

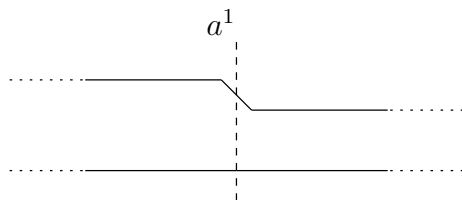


Figura 3.8: Perfil de la placa CFRP2 en la zona de cambio de espesor.

Esta placa fue fabricada junto a otras dos que contenían delaminaciones inducidas (mediante la colocación de teflón doblado), formando parte las tres del mismo panel, siendo el panel cortado posteriormente para obtener las tres placas. En la Figura 3.9 se puede ver una imagen de ultrasonido (C-SCAN) que se realizó a la placa una vez elaborada. En ella puede verse el cambio de espesor y la ausencia de defectos inducidos.

Placa CFRP2

Longitud total del lado largo ( $a_t$ )	146.2 cm
Longitud total de la parte 1 ( $a_t^1$ )	51.1 cm
Longitud total de la parte 2 ( $a_t^2$ )	95.1 cm
Longitud total del lado corto ( $b_t$ )	92.1 cm
Longitud de empotramiento del lado largo ( $a$ )	143 cm
Longitud de empotramiento de la parte 1 ( $a^1$ )	49.5 cm
Longitud de empotramiento de la parte 2 ( $a^2$ )	93.5 cm
Longitud de empotramiento del lado corto ( $b$ )	89 cm
Módulo de Young longitudinal a las fibras ( $E_L$ )	$1.31 \times 10^{11}$ Pa
Módulo de Young transversal a las fibras ( $E_T$ )	$9.05 \times 10^9$ Pa
Módulo de Poisson ( $\nu$ )	0.3
Módulo de cizalladura ( $G$ )	$4.6 \times 10^9$ Pa
Masa ( $m$ )	9.800 kg
Densidad ( $\rho$ )	$1663.4 \text{ kg/m}^3$
Número de capas	31/22
Espesor de cada capa ( $h_i$ )	0.174 mm
Espesor total ( $h^1/h^2$ )	5.394/3.828 mm
Orientación de las fibras parte 1	$[\pm 45/90/0/90/0_3/ \mp 45/0_2/ \mp 45/0/\bar{0}]_S$
Orientación de las fibras parte 2	$[\pm 45/90/0/90/0_3/ \mp 45/0]_S$
Coefficiente de amortiguamiento ( $\xi$ )	0.0050

Tabla 3.3: Propiedades físicas de la placa CFRP2.

### 3.3 Descripción de los PZT usados

Los piezoeléctricos usados como sensores en todas las placas fueron del tipo PI® PRYY+0220. Su geometría es circular, con un diámetro de 10 mm y un espesor de 0.5 mm. La cerámica usada en la construcción de estos piezoeléctricos es PIC151 [106], material cerámico de alta constante de carga piezoeléctrica (como se puede ver en la Tabla 3.8), con los electrodos de plata [105]. Estas propiedades quedan resumidas en la Tabla 3.4. En la Figura 3.10 se puede ver un ejemplo de este tipo de PZT ya instrumentado sobre la placa CFRP1. Este tipo de sensor permite, al tener tan pequeño espesor, ser embebido dentro de la estructura, por ejemplo, entre las capas del material CFRP.



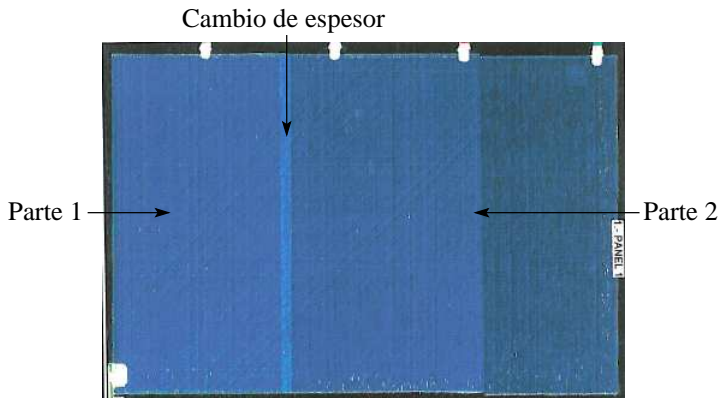


Figura 3.9: Imagen de ultrasonidos (C-SCAN) de la placa CFRP2.

Debido a las diferentes características de las placas, la fuerza requerida para producir una amplitud lo suficientemente alta para ser adecuadamente medida es distinta en cada caso. Esto ha hecho necesario usar un PZT distinto para cada placa:

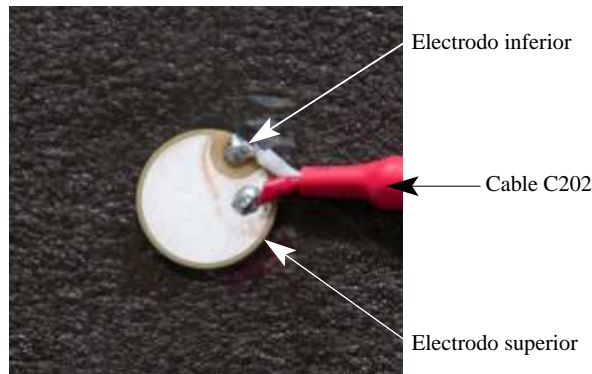


Figura 3.10: Ejemplo de PZT usado como sensor.

Modelo	Cerámica	Electrodos	Geometría	Diámetro	Espesor
PRYY+0220	PIC151	Ag	Circular	10 mm	0.5 mm

Tabla 3.4: Propiedades de los PZT usados como sensores en los experimentos.



### 3.3. Descripción de los PZT usados

---

- Para la placa Aluminio se usó un PZT del tipo PI® PRYY-0842. Su geometría es circular, con un diámetro de 20 mm y un espesor de 2 mm. La cerámica usada en la construcción de estos PZT es PIC151 [106], al igual que en el caso anterior, e igualmente los electrodos son de plata [105]. Estas propiedades quedan resumidas en la Tabla 3.5. En la Figura 3.11 se puede ver un ejemplo de este tipo de PZT ya instrumentado sobre la placa Aluminio. En este caso, al ser de un espesor mayor sería más difícil embeberlo en estructuras, si bien fue necesario usarlo ya que actuadores más delgados como el usado en la placa CFRP1 no excitaban la placa de forma suficiente.

Modelo	Cerámica	Electrodos	Geometría	Diámetro	Espesor
PRYY-0842	PIC151	Ag	Circular	20 mm	2 mm

Tabla 3.5: Propiedades de los PZT usados como actuadores en la placa Aluminio.

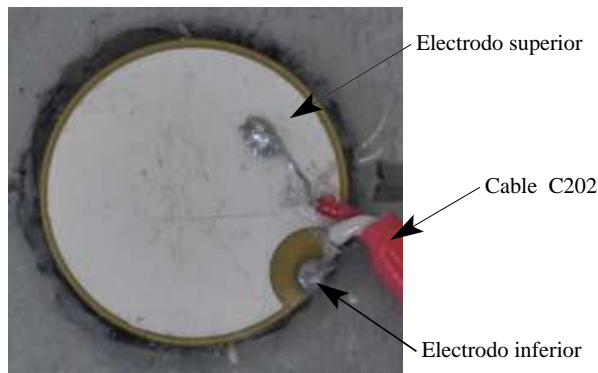


Figura 3.11: Ejemplo de PZT usado como actuador en la placa Aluminio.

- Para la placa CFRP1 se usó un PZT del tipo PI® PRYY+0796. Su geometría es circular, con un diámetro de 20 mm y un espesor de 0.5 mm. La cerámica usada en la construcción de estos PZT es PIC255 [106], que ha sido optimizada especialmente para su uso como actuador, y cuyas propiedades se pueden ver en la Tabla 3.8. Igualmente sus electrodos son de plata [105]. Estas propiedades quedan resumidas en la Tabla 3.6. En la Figura 3.12 se puede ver un ejemplo de este tipo de PZT ya instrumentado sobre la placa

CFRP1. Este PZT también puede ser embebido en la estructura, si bien no se puede usar en estructuras difíciles de excitar.

Modelo	Cerámica	Electrodos	Geometría	Diámetro	Espesor
PRYY+0796	PIC255	Ag	Circular	20 mm	0.5 mm

Tabla 3.6: Propiedades de los PZT usados como actuadores en la placa CFRP1.

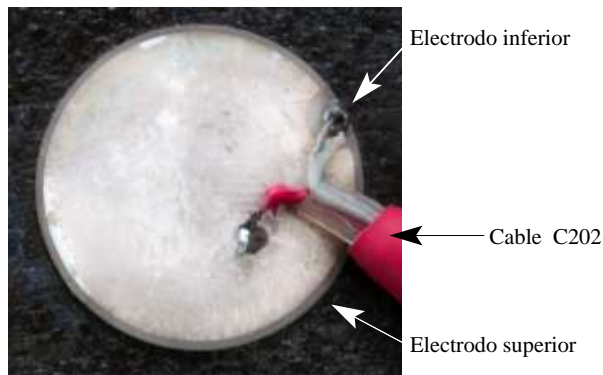


Figura 3.12: Ejemplo de PZT usado como actuador en la placa CFRP1.

- Para la placa CFRP2 se usó un PZT del tipo PI® DuraAct P-876.A12 [104]. Su geometría es rectangular, con unas dimensiones de 61×35 mm y un espesor de 0.5 mm. La cerámica usada en la construcción de estos PZT es PIC255 [106]. El metal de los electrodos no ha sido proporcionado por el fabricante. Las principales propiedades de este PZT quedan resumidas en la Tabla 3.7. En la Figura 3.13 se puede ver este PZT ya instrumentado sobre la placa CFRP2. Este PZT también puede ser embebido para realizar *Structural Health Monitoring* incluso para estructuras difíciles de excitar, si bien hay que tener en cuenta que su precio es alto.

### 3.3. Descripción de los PZT usados

Modelo	DuraAct P-876.A12
Voltaje de funcionamiento	-100 a +400 V
Contracción lateral	650 $\mu\text{m}/\text{m}$
Fuerza máxima	265 N
Geometría	Rectangular
Largo	61 mm
Ancho	35 mm
Espesor	0.5 mm
Cerámica	PIC 255
Espesor de la capa cerámica	200 $\mu\text{m}$
Masa	3.5 g

Tabla 3.7: Propiedades del PZT usado como actuador en la CFRP2 (ver [104]).

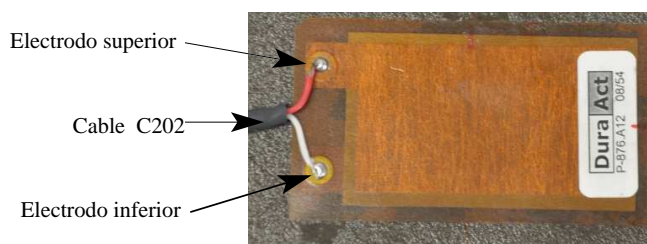


Figura 3.13: PZT usado como actuador en la placa CFRP2.

Tipo de cerámica		PIC151	PIC255
Constantes de carga piezoeléctrica	$d_{31}$	$-2.1 \times 10^{-10}$ C/N	$-1.8 \times 10^{-10}$ C/N
	$d_{33}$	$5 \times 10^{-10}$ C/N	$4 \times 10^{-10}$ C/N

Tabla 3.8: Propiedades de las cerámicas usadas en la construcción de los PZT (ver [106]).

### 3.4 Condiciones de contorno de las placas

Las condiciones de contorno empleadas en la mayoría de los experimentos fueron las de placa empotrada en sus cuatro lados. Para implementarlas se usó un marco rígido de acero apretado con pares tornillo-tuerca.

Para las placas Aluminio y CFRP1 se usó el mismo marco rígido de acero, que permite que la placa una vez empotrada tenga unas dimensiones efectivas de vibración de  $85 \times 65$  cm, (véase la Figura 3.14). Cada par tornillo-tuerca se apretó a un torque de 60 N·m.



Figura 3.14: Marco usado con las placas Aluminio y CFRP1. Elaborado en el Grupo de Investigación.

Para la placa CFRP2 se usó otro marco rígido de acero más grande (véase la Figura 3.15), que adapta el empotramiento a las dos zonas de diferente espesor de la placa. Esta marco permite que la placa una vez empotrada tenga unas dimensiones efectivas de vibración de  $143 \times 89$  cm. En este caso, cada par tornillo-tuerca se apretó a un torque de 20 N·m. En la Figura 3.16 se puede apreciar como este marco permitía zonas de diferente espesor.

La otra condición de contorno usada en algunos ensayos fue la de placa libre. Para implementarla se apoyó el centro de la placa sobre una esponja blanda, dejando libres sus cuatro lados (véase la Figura 3.17).

### 3.4. Condiciones de contorno de las placas

---



Figura 3.15: Marco usado con la placa CFRP2. Elaborado en el Grupo de Investigación.

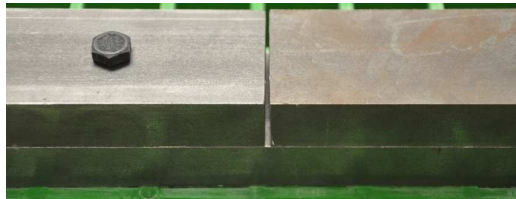


Figura 3.16: Detalle de la posibilidad de cambio de espesor en el marco usado en la placa CFRP2.

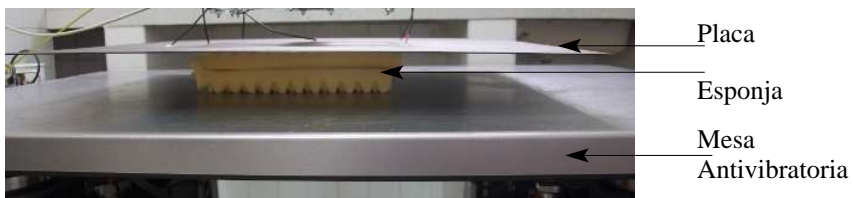


Figura 3.17: Detalle de la condición de contorno en placa cuasilibre (en placa CFRP1).

### 3.5 Mesas de apoyo

Las mesas de apoyo del experimento también fueron diferentes según la placa:

- Para las placas Aluminio y CFRP1 se usó una mesa antivibratoria TMC® modelo 68-571 [2], consistente en una plancha de acero inoxidable de dimensiones  $908 \times 760 \times 225$  mm apoyada en pistones soportados por gas, proporcionado por una bombona de nitrógeno a una presión de aproximadamente 5.5 atm (véase la Figura 3.18).



Figura 3.18: Mesa usada con las placas Aluminio y CFRP1.

- Para la placa CFRP2 se usó una mesa de acero de fabricación propia en el Grupo de Investigación, con un panel de plástico de rejilla que permitía fijar el marco de acero (véase la Figura 3.19).



Figura 3.19: Mesa usada con la placa CFRP2. Elaborada en el Grupo de Investigación.

### 3.6 Instrumentación de los sensores y actuadores

Para proporcionar la señal de entrada al actuador PZT y para registrar la señal proporcionada por los sensores PZT se usó un cable Tasker® C202 [3] de dos hilos con apantallamiento en espiral, como el que se ve en la Figura 3.20(a). La unión con el sensor o actuador consistió en una soldadura de los dos hilos del cable con los dos electrodos del PZT, cortando la parte de apantallamiento. Los PZT se pegaron a las placas mediante un pegamento Z70 DE HBM® [4].

Por el otro extremo del cable la instrumentación fue diferente según el uso de actuador o sensor:

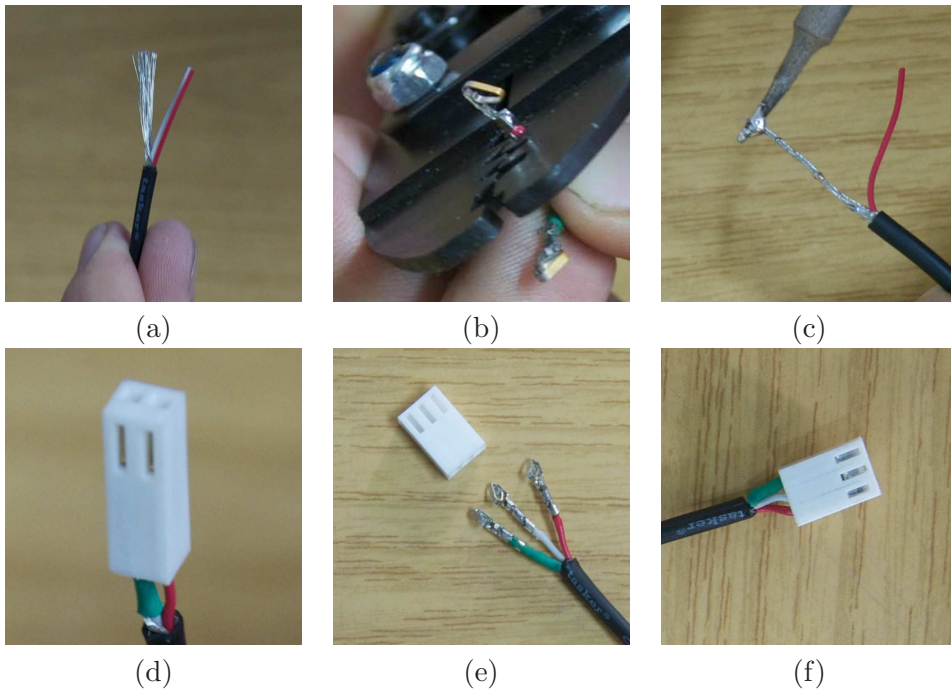


Figura 3.20: (a) Cable Tasker® C202 de dos hilos con apantallamiento en espiral. (b) Corrugado de terminales. (c) Unión mediante estañado del hilo conectado al electrodo inferior del actuador con el apantallamiento. (d) Cable de actuador con conector *Header Housing* colocado. (e) Cable de sensor con los tres terminales de corrugado soldados. (f) Cable de sensor con conector *Header Housing* colocado.



- En el caso del actuador se soldaron dos terminales de corrugado (véase la Figura 3.20(b)), uno al hilo conectado al electrodo superior del actuador, y otro a la unión del hilo conectado al electrodo inferior del actuador con el apantallamiento (véase la Figura 3.20(c)), colocando sobre los terminales de corrugado un conector *Header Housing* de dos pines (véase el resultado final en la Figura 3.20(d)).
- En el caso del sensor, se soldaron tres terminales de corrugado: uno a cada uno de los dos hilos y otro al apantallamiento, como se observa en la Figura 3.20(e), colocando sobre los terminales de corrugado un conector *Header Housing* de tres pines, (véase el resultado final en la Figura 3.20(f)).

### 3.7 Conexiones

La señal de excitación fue generada por el equipo PULSE, cuya salida tiene un terminal de tipo BNC. Justo a la salida del generador de señales se colocó una conexión “en T” de forma que, por un lado, permitía registrar la señal de excitación conectando una de las salidas con uno de los canales de entrada del PULSE, y por otro lado la señal era recibida por el amplificador EPA-104, conectando la otra salida con la entrada del amplificador. Ambas conexiones se realizaban a través de cables coaxiales de terminales BNC. Una vez amplificada la señal, se transfería al cable Tasker® C202 del actuador mediante un cable Emelec® Q11-195 [5], monohilo con apantallamiento en trenza, conectando los dos apantallamientos. En la Figura 3.21(a) se observa la conexión de estos dos cables.

La señal de respuesta de la placa era recogida por los dos electrodos de cada sensor, y transmitida a través de los dos hilos del cable Tasker® C202, que se conectaba a la caja de conexión sensores-RJ45 tal y como se puede ver en en la Figura 3.21(b), de forma que las señales recogidas por los dos hilos conectados al sensor eran transmitidas a través de dos de los hilos de un cable RJ45 (de tipo STP, para minimizar las interferencias electromagnéticas) y el apantallamiento quedaba conectado a tierra. De esta forma, a través de un cable RJ45 podíamos transmitir a la vez la señal correspondiente a cuatro sensores. Las ocho señales del cable RJ45 eran transformadas a salida BNC a través de una segunda caja de conexión, y de ahí conectadas a los canales de entrada del equipo PULSE a través de cables



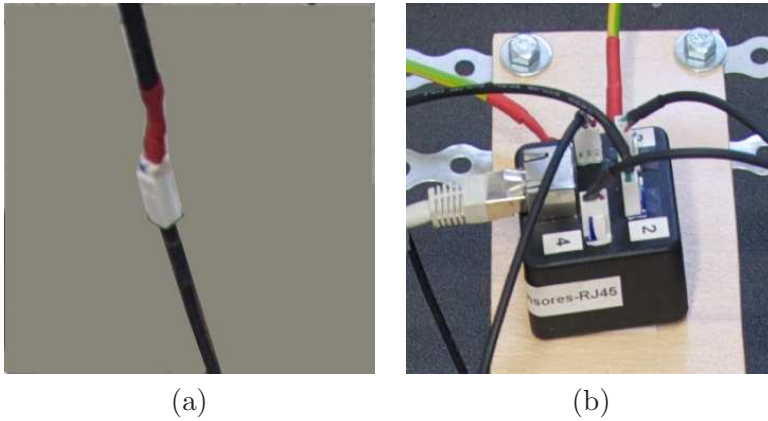


Figura 3.21: (a) Conexión del cable Tasker® C202 del actuador con el cable Emelec® Q11-195, (b) Caja de conexión sensores-RJ45 con cables de sensor, de tierra y RJ45 conectados.

coaxiales con terminales BNC.

En cuanto a las conexiones a tierra, se usó un sistema independiente de la red eléctrica creado especialmente para el experimento. Esta tierra se conectaba a una nueva caja de conexión, donde a su vez se conectaban mediante sus correspondientes cables de tierra el equipo PULSE, el amplificador (junto al apantallamiento del cable Emelec® Q11-195) y las cajas de conexión (sensores-RJ45 y RJ45-BNC). A través de las cajas de conexión conseguimos que los apantallamientos de los cables Tasker® C202, RJ45-STP y de los cables coaxiales también estuvieran conectados a tierra. Por último, el marco de acero se conectaba a tierra mediante un cable conectado a la conexión de tierra de la caja de conexión sensores-RJ45.

Los dos módulos del equipo PULSE estaban conectados entre sí a través de un cable coaxial con terminales BNC, que permitía que estuvieran sincronizados. A su vez, cada módulo estaba conectado a un *switch* a través de un cable RJ45, de forma que era posible controlar el sistema conectando un PC con el software adecuado a dicho *switch*. En [47] pueden verse los detalles de estas conexiones.

### 3.8 Caracterización en frecuencia de los sensores y del sistema

Puesto que el sistema no tiene la misma respuesta a todas las frecuencias (principalmente los PZT), es necesario conocer y caracterizar esta respuesta. Para ello, se pegaron entre sí dos PZT del mismo tipo, de forma que uno hacía la función de actuador y otro la de sensor, asegurándose de que no hubiera continuidad eléctrica entre ellos mediante un aislante, que en este caso fue el propio pegamento (Z70 DE HBM®), el mismo usado para pegar los PZT a las placas). Se instrumentaron dichos PZT como sensores, de la forma explicada en la Sección 3.6, siendo posible convertir cualquiera de los dos conectores *Header Housing* de tres pines en uno de dos mediante un adaptador que unía el hilo procedente del electrodo inferior con el apantallamiento del cable Tasker® C202. Esto permitía que cualquiera de los dos PZT fuera usado a conveniencia como sensor o actuador.

Se realizaron medidas con tres tipos de PZT: PRYY+0220 (usado como sensor en las tres placas), PRYY-0842 (usado como actuador en la placa Aluminio) y PRYY+0796 (usado como actuador en la placa CFRP1). No se pudo llevar a cabo la caracterización del PZT DuraAct P-876.A12. Se realizaron dos tipos de medidas para cada tipo de PZT:

- **Primer tipo de medida:** Conectando tanto actuador como sensor directamente al sistema PULSE, midiendo así la respuesta en frecuencia del PZT. A modo de ejemplo, en la Figura 3.22 se puede observar una pareja de PZT PRYY+0796 conectados de esta forma.
- **Segundo tipo de medida:** Conectando tanto actuador como sensor al sistema completo de medida, esto es, el actuador al cable Emelec® Q11-195 y el sensor a la caja de conexión sensores-RJ45, midiendo de esta forma la respuesta en frecuencia de todo el sistema. A modo de ejemplo, en la Figura 3.23 se puede observar una pareja de PZT PRYY-0842 conectados de esta forma.

En todos los casos se excitó con un ruido blanco con un ancho de banda de 0 a 1600 Hz, y se realizaron cinco medidas de 30 segundos cada una, con una frecuencia de muestreo de 4096 Hz. Posteriormente se intercambié el papel de sensor y actuador, realizando otras cinco medidas para observar las diferencias.

### 3.8. Caracterización en frecuencia de los sensores y del sistema

---

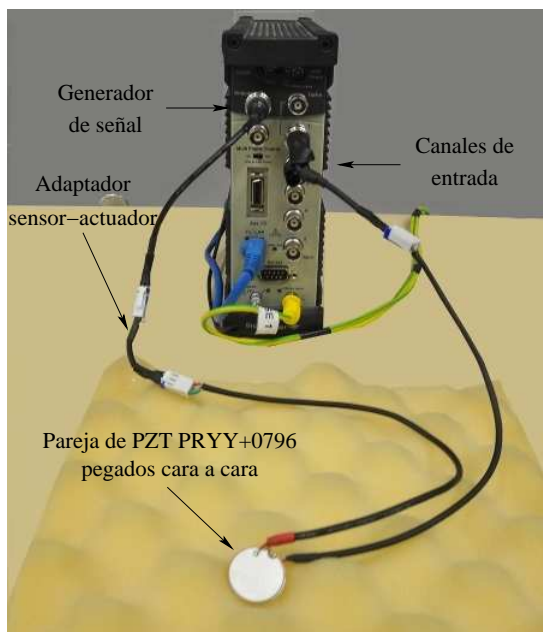


Figura 3.22: Pareja de PZT PRYY+0796 conectados directamente al sistema PULSE.



Figura 3.23: Pareja de PZT PRYY-0842 conectados al sistema completo de medida.

### 3.8.1 Resultados

Para analizar los resultados se hizo uso de la Función de Respuesta en Frecuencia (FRF). Para calcularla, obtenemos la Densidad de Potencia Espectral (PSD, por sus siglas en inglés) tanto de la señal de respuesta obtenida por el sensor ( $PSD_{out}$ ) como de la señal de excitación proporcionada al actuador ( $PSD_{in}$ ). Estas PSD fueron calculadas mediante el software Matlab®<sup>®</sup>, haciendo uso del algoritmo de Welch. Una vez obtenidas las PSD, calculamos la FRF como

$$FRF = \frac{PSD_{out}}{PSD_{in}}, \quad (3.1)$$

siendo la división punto a punto para cada valor de frecuencia. A las FRFs obtenidas a partir del primer tipo de medidas las llamaremos  $FRF_{PZT}$  y a las obtenidos a partir del segundo tipo  $FRF_{Sistema}$ .

Haciendo esto sobre cada una de las medidas, podemos observar que cada tanda de cinco medidas proporciona unos resultados similares, hasta el punto que las cinco medidas se superponen al representarlas en una gráfica. Por tanto, en la gráficas solo se muestra una medida de cada tipo. Sin embargo, al intercambiar el rol de sensor y actuador obtenemos otras cinco medidas similares entre sí, pero no a las anteriores. Esto es para las  $FRF_{PZT}$  y para las  $FRF_{Sistema}$ .

Para los tres tipos de PZT se observa un comportamiento similar en todas las FRF: a muy bajas frecuencias presentan una fuerte subida, para luego volverse casi plana desde antes de los 200 Hz hasta los 1600 Hz que están calculadas. Por tanto, el rango que consideraremos como de respuesta plana será de 200 Hz a 1600 Hz.

En el caso de las  $FRF_{PZT}$  las gráficas se presentan muy poco ruidosas, excepto por el pico de 50 Hz correspondiente al sistema eléctrico (que aparece debido al bajo nivel de señal). Sin embargo, las  $FRF_{Sistema}$  son en general bastante ruidosas (sin presentar picos concretos debido a que el nivel de señal era alto), si bien esto no impide ver la tendencia general.

En cuanto a las ganancias obtenidas, difieren ligeramente en cada PZT. Para los PZT delgados (PRYY+0220 y PRYY+0796) las  $FRF_{Sistema}$  presentan más ganancia que las  $FRF_{PZT}$  en la zona de bajas frecuencias de nuestro rango, igualándose un poco en la zona de altas frecuencias, especialmente en el caso del PRYY+0220. El PZT más grueso (PRYY-0842) presenta una ganancia ligeramente mayor de las

### 3.8. Caracterización en frecuencia de los sensores y del sistema

---

$FRF_{PZT}$  para altas frecuencias, siendo muy parecida para las bajas. En cuanto a valores absolutos, en el caso del PRYY+0220 las ganancias oscilan entre -77 y -71 dB, mientras que para el PRYY-0842 y el PRYY+0796 las ganancias oscilan alrededor de los -70 dB.

En la Figuras 3.24, 3.25 y 3.26 se pueden observar estos resultados.

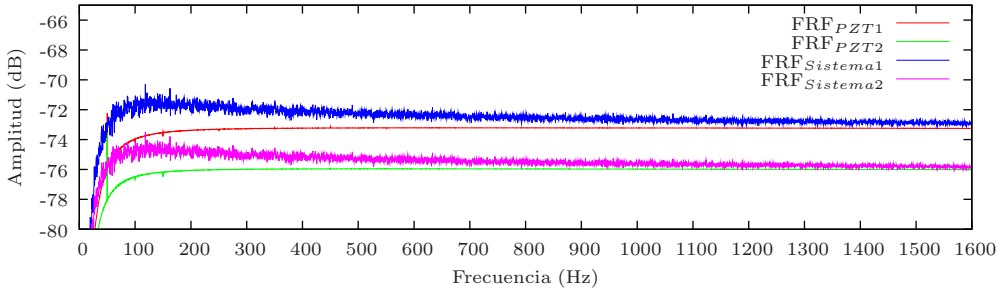


Figura 3.24:  $FRF_{PZT}$  y  $FRF_{Sistema}$  en las dos configuraciones sensor-actuador para el PZT PRYY+0220.

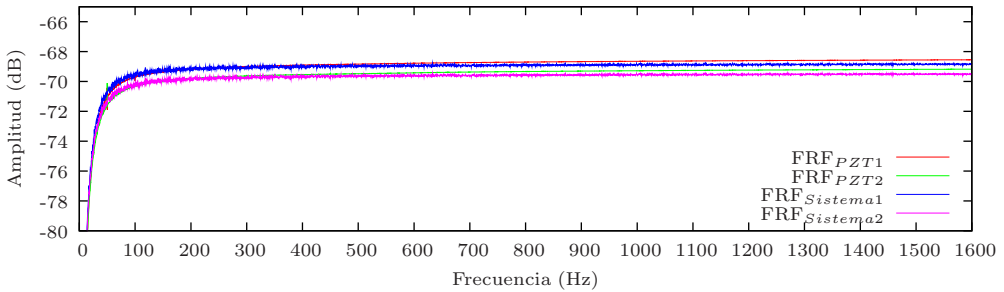


Figura 3.25:  $FRF_{PZT}$  y  $FRF_{Sistema}$  en las dos configuraciones sensor-actuador para el PZT PRYY-0842.

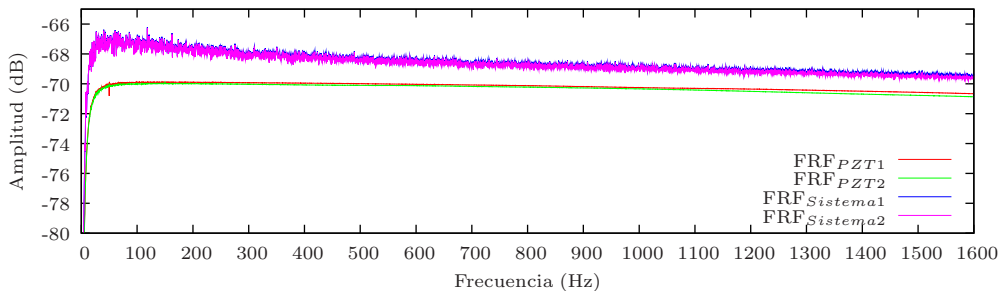


Figura 3.26:  $FRF_{PZT}$  y  $FRF_{Sistema}$  en las dos configuraciones sensor-actuador para el PZT PRYY+0796.

### 3.9 Colocación de los sensores y actuadores PZT

La colocación de sensores y actuadores en las placas, así como la notación usada para cada uno se detalla en las Tablas 3.9, 3.10 y 3.11. En las placas Aluminio y CFRP1 se usaron dos actuadores A1 y A2 (no actuando al mismo tiempo), mientras en la placa CFRP2 se usó un solo actuador A1. En todas las placas se usaron cuatro sensores S1, S2, S3 y S4 (midiendo al mismo tiempo). En las placas Aluminio y CFRP1 los sensores se colocaron simétricos respecto del centro, como se puede ver en la Figura 3.27, mientras en la placa CFRP2 se colocaron dos sensores en la parte gruesa (S1 y S2) y dos en la parte delgada (S3 y S4), como se puede ver en la Figura 3.28.

Modelo	Uso	Posición	Notación
PRYY-0842	Actuador	(42.5, 32.5) cm	A1
PRYY-0842	Actuador	(20.0, 14.0) cm	A2
PRYY+0220	Sensor	(24.5, 21.5) cm	S1
PRYY+0220	Sensor	(24.5, 43.5) cm	S2
PRYY+0220	Sensor	(60.5, 21.5) cm	S3
PRYY+0220	Sensor	(60.5, 43.5) cm	S4

Tabla 3.9: PZT usados en la placa Aluminio.

Modelo	Uso	Posición	Notación
PRYY+0796	Actuador	(42.5, 32.5) cm	A1
PRYY+0796	Actuador	(20.0, 14.0) cm	A2
PRYY+0220	Sensor	(24.5, 21.5) cm	S1
PRYY+0220	Sensor	(24.5, 43.5) cm	S2
PRYY+0220	Sensor	(60.5, 21.5) cm	S3
PRYY+0220	Sensor	(60.5, 43.5) cm	S4

Tabla 3.10: PZT usados en la placa CFRP1.

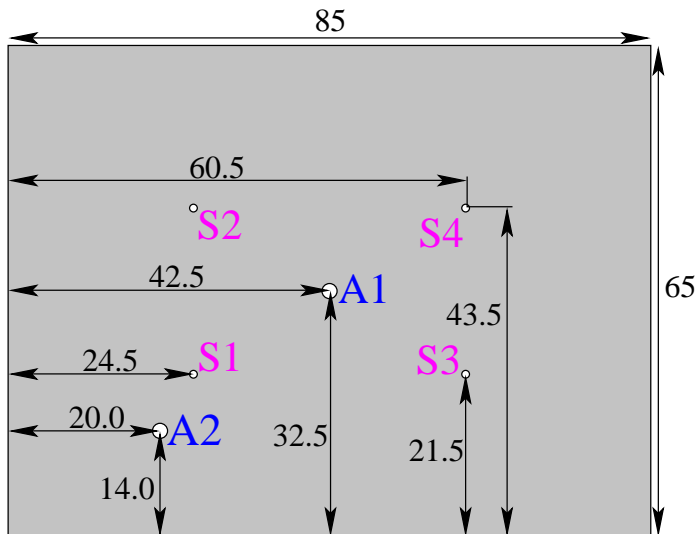


Figura 3.27: Esquema de colocación de los PZT en las placas Aluminio y CFRP1. Medidas en cm.

Modelo	Uso	Posición	Notación
DuraAct P-876.A12	Actuador	(84.0, 45.0) cm	A1
PRYY+0220	Sensor	(40.0, 28.5) cm	S1
PRYY+0220	Sensor	(40.0, 60.0) cm	S2
PRYY+0220	Sensor	(126.0, 26.5) cm	S3
PRYY+0220	Sensor	(126.0, 62.0) cm	S4

Tabla 3.11: PZT usados en la placa CFRP2.

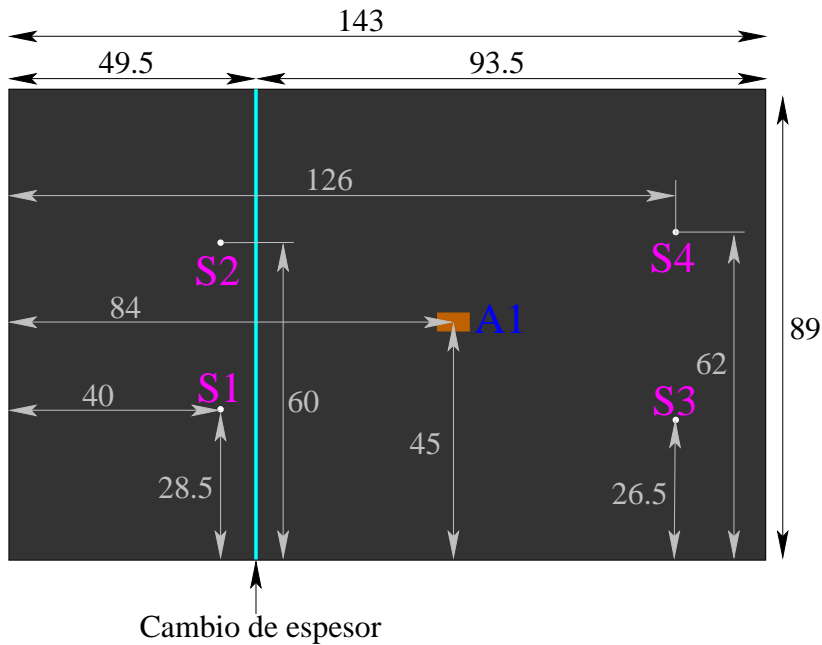


Figura 3.28: Esquema de colocación de los PZT en la placa CFRP2. Medidas en cm.

### 3.10 Protocolo experimental

Durante los ensayos se ha seguido siempre el mismo protocolo experimental, que se explica a continuación con el fin de que los resultados sean reproducibles:

- En primer lugar se debe comprobar que todas las conexiones detalladas en el esquema de la Figura 3.6 son correctas, que la ganancia del amplificador está en  $\times 20$ , y que el programa de ordenador que gestiona el sistema PULSE® está funcionando y correctamente configurado (señal de excitación usada, duración de la medida, frecuencia de muestreo, canales a los que se le realiza el análisis de Fourier, etc.)
- A continuación, desde el programa de ordenador se inicia una medida. Este medida debe ser posteriormente desechada, por lo que es conveniente elegir un nombre para salvar los datos que nos lo recuerde. Durante la excitación se debe comprobar que:



- Los 9 canales usados dan señal.
  - La señal correspondiente al canal 5 (la excitación) es considerablemente mayor que el resto.
  - Las dos señales correspondientes a los dos electrodos de cualquiera de los sensores deben tener el mismo orden de magnitud, y bajar y subir a la vez (es suficiente con una comprobación visual).
- Una vez finalice la excitación, lo razonable es tener configurado el programa para que deje de grabar la medida. Sin embargo, hasta que no pulsemos la tecla adecuada, PULSE® seguirá mostrando en pantalla tanto las señales temporales recogidas instantáneamente como el análisis de Fourier correspondiente, aunque estos datos no queden guardados. En nuestro caso, contábamos con licencias para hacer análisis de Fourier en dos canales, por lo que haciendo la Densidad Espectral de Potencia sobre dos canales correspondientes a los dos electrodos de cualquiera de los sensores, podemos visualizar directamente en pantalla la Densidad Espectral de Potencia del sensor correspondiente.
  - En este estado (finalizada la excitación y la grabación de datos), se eliminan las fuentes de ruido acústico ambiental si las hubiera y se visualiza la Densidad Espectral de Potencia, para garantizar que el ruido eléctrico ambiental es mínimo. Se ha considerado como criterio válido para empezar la medida que ningún pico sobrepase los -100 dB.
  - Una vez comprobado que el ruido eléctrico ambiental nos permite medir, se desaprietan todos los pares tornillo-tuerca del marco rígido de acero, con objeto de liberar cualquier tipo de tensión térmica. A continuación se vuelven a apretar con un torque de 60 N·m en el caso de las placas Aluminio y CFRP1. Para la placa CFRP2 este paso no ha podido ser llevado a cabo.
  - Posteriormente se pulsa la tecla F6 para terminar la medida de comprobación inicial, se escoge un nombre adecuado para la grabación de los datos, y se realizan las medidas. Salvo que se especifique lo contrario, siempre se han realizado cinco medidas consecutivas de cada tipo.



## Capítulo 4

# Caracterización de las placas sin daño

Para caracterizar la respuesta vibracional de las placas usadas a lo largo de este trabajo se han usado dos enfoques: **el análisis modal**, consistente en estudiar los modos de vibración y las frecuencias principales de la placa, y **el análisis transitorio**, consistente en estudiar la respuesta de la placa en el dominio del tiempo a una determinada excitación. Para el análisis modal se han usado tres herramientas:

- Simulación mediante el método de los elementos finitos (FEM).
- Cálculos semianalíticos mediante el método de Ritz.
- Análisis en frecuencia de señales medidas experimentalmente.

Y para el análisis transitorio se han usado dos:

- Análisis de señales obtenidas mediante simulación FEM.
- Análisis de señales medidas experimentalmente.

## 4.1 Análisis modal: modos y frecuencias

### 4.1.1 Ajuste de parámetros

En primer lugar se ha debido realizar un ajuste de las variables físicas de las placas, especialmente su espesor y su densidad. El espesor es difícil de medir con precisión por diversos motivos explicados en la Sección 3.2. Por su parte la densidad, considerando como datos conocidos (medidos experimentalmente) la masa ( $m$ ) y las dos dimensiones principales de la placa ( $a$  y  $b$ ), es dependiente del espesor ( $h$ ) según la siguiente expresión:

$$\rho = \frac{\text{Masa}}{\text{Volumen}} = \frac{m}{a \cdot b \cdot h}. \quad (4.1)$$

Para realizar el ajuste, el primer paso consistió en identificar las frecuencias principales de la placa obtenidas mediante los ensayos experimentales, procediéndose según se indica en la Sección 4.1.4. Una vez identificadas estas frecuencias, se realizaron una serie de cálculos mediante el método de Ritz (según lo explicado en la siguiente sección) usando siempre el mismo modelo y parámetros de entrada, salvo el espesor (y la densidad correspondiente), que se elige como variable de ajuste. Se eligió el método de Ritz por ser más rápido que las simulaciones mediante FEM, obteniendo resultados similares, como se verá más adelante.

Una vez realizados los cálculos y obtenido un conjunto de frecuencias para cada uno de ellos, se midió la distancia entre  $N$  frecuencias de cada conjunto (obtenidas numéricamente) y sus correspondientes  $N$  frecuencias obtenidas experimentalmente mediante la siguiente expresión:

$$distancia = \sum_{i=1}^N \left( \frac{f_i^{teo} - f_i^{exp}}{f_i^{teo}} \right)^2 \quad (4.2)$$

siendo  $N$  el número de frecuencias que hemos sido capaces de identificar experimentalmente,  $f_i^{teo}$  las frecuencias teóricas y  $f_i^{exp}$  las frecuencias experimentales.

Finalmente, se fijó el espesor (y su correspondiente densidad) como aquel valor para el cual la distancia definida en (4.2) es mínima.

Usando este procedimiento, los resultados obtenidos fueron los siguientes:

- En el caso de la placa Aluminio, se obtuvo una distancia mínima para un

espesor de **2.86 mm**, y su correspondiente densidad **2703.6 kg/m<sup>3</sup>**.

- En el caso de la placa CFRP1 se obtuvo una distancia mínima para un espesor de **0.175 mm por capa (2.1 mm en total)**, y su correspondiente densidad **1727 kg/m<sup>3</sup>**.
- En el caso de la placa CFRP2 se obtuvo una distancia mínima para un espesor de **0.174 mm por capa (en total, 5.394 mm para la parte gruesa y 3.828 mm para la parte delgada)**, y su correspondiente densidad **1663.4 kg/m<sup>3</sup>**.

Para la placa Aluminio, al no ser conocidas las constantes ingenieriles  $E$  y  $\nu$ , se intentó realizar este ajuste incluyendo los diferentes valores encontrados en las fuentes bibliográficas, pero el resultado fue inconcluyente al ser las diferencias en frecuencias menores que el error experimental (0.25 Hz), por lo que se tomó la moda de los valores de la bibliografía.

#### 4.1.2 Simulación mediante FEM

En primer lugar se presentan los resultados del análisis modal realizado mediante simulación de Elementos Finitos. Para llevar a cabo la simulación se usó el software de investigación FEAP (*Finite Element Analysis Program*) [125].

#### Placa Aluminio

La primera placa objeto de estudio es la placa Aluminio, cuyas propiedades podemos ver en la Tabla 3.1. A continuación se detalla la implementación llevada a cabo, y posteriormente se justificará el mallado elegido (170×130 elementos, esto es, elementos cuadrados de 0.5 cm de lado).

En primer lugar se lleva a cabo un pre-procesado. Para ello, se detallan los parámetros que serán usados posteriormente, usando siempre el Sistema Internacional para las unidades:

```
a = 0.85      ! lado largo (eje x)
b = 0.65      ! lado corto (eje y)
h = 0.00286   ! espesor
e = 7.00E+10 ! módulo de Young
nu = 0.33     ! módulo de Poisson
```

```
d = 2703.6      ! densidad
m = 170         ! divisiones del mallado según el eje x
n = 130        ! divisiones del mallado según el eje y
```

Se realiza un mallado cuadrado mediante el comando `BLOCK`, creando un mallado de  $m \times n$  elementos:

```
BLOCK
CART, m, n, , , 1
1, 0.0, 0.0, 0.0
2, a, 0.0, 0.0
3, a, b, 0.0
4, 0.0, b, 0.0
```

Las condiciones de contorno (empotrada en las cuatro lados de la placa) se definen por ejes usando el comando `EBOU`, indicando el eje (1 = eje  $x$ , 2 = eje  $y$ ), la coordenada por la que pasa el eje y la condición para los seis grados de libertad, donde “1” significa restringido:

```
EBOU
1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1
2, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1
1, a, 1, 1, 1, 1, 1, 1
2, b, 1, 1, 1, 1, 1, 1
```

El material es isótropo, y el elemento usado fue tipo `SHELL`, elemento de cuatro nodos ya predefinido en el programa `FEAP`. Esto lo indicamos al definir el material, de la siguiente forma:

```
MATERIAL, 1          ! número de material
SHELL              ! elemento tipo shell
ELASTic, ISOTropic, e, nu ! material isótropo
DENSity, , d       ! densidad
THICKness, , h     ! espesor
```

Una vez definido el sistema, se pasa al cálculo mediante el comando `BATCH`:

```
BATCH
MASS, LUMP        ! cálculo del tensor de masas diagonal
TANGent, , 1      ! cálculo del tensor de rigidez tangente
SUBSpace, , 50    ! cálculo de los primeros 50 modos
END
```

Por último, como post-procesado, se escriben en el archivo de salida los valores de los autovectores en todos los nodos para los 50 modos calculados:

```
BATCh
EIGVector, all, 1
EIGVector, all, 2
...
EIGVector, all, 50
END
```

Los resultados obtenidos mediante este procedimiento para la placa Aluminio se pueden ver en la Tabla 4.4 (frecuencias principales) y en la Tabla A.1 (modos de vibración).

Para la elección del mallado se hicieron diferentes pruebas, estudiando tanto los resultados obtenidos como el tiempo de cálculo. Se estudiaron los siguientes mallados:

- Elementos rectangulares de lados 8.5 cm y 6.5 cm (mallado de  $10 \times 10$  elementos).
- Elementos cuadrados de 2.5 cm de lado (mallado de  $34 \times 26$  elementos).
- Elementos cuadrados de 1 cm de lado (mallado de  $85 \times 65$  elementos).
- Elementos cuadrados de 0.5 cm de lado (mallado de  $170 \times 130$  elementos).
- Elementos cuadrados de  $0.\widehat{3}$  cm de lado (mallado de  $255 \times 195$  elementos).

En la Tabla 4.1 podemos observar los tiempos de cálculo aproximados del análisis modal de la placa Aluminio mediante FEAP con diferentes mallados, así como los valores obtenidos para diferentes frecuencias, y las correspondientes frecuencias experimentales. El programa usado fue FEAP versión 7.5 para 64 bits, corriendo sobre un procesador Intel® Core2 Quad CPU de 64 bits con una velocidad de 1600 MHz, teniendo disponibles 4 GB de memoria RAM, y usando como Sistema Operativo GNU/Linux OpenSuse 11.1 para la arquitectura x86\_64.

Si bien los resultados mejoran al aumentar el número de elementos, el tiempo de cálculo se incrementa de forma aproximadamente cuadrática, por lo que es necesario buscar un equilibrio entre exactitud y tiempo consumido. Este equilibrio lo podemos encontrar en los mallados cuadrados de 2.5 cm (para aplicaciones que

requieran rapidez pero no exactitud en los modos altos), 1 cm, y en menor medida, 0.5 cm, si bien este mallado presenta la ventaja de ser totalmente compatible con las geometrías de las placas usadas en los ensayos, incluidas las posiciones de sensores y actuadores, siendo esta la principal razón por la que ha sido elegido para las simulaciones. No se han observado diferencias significativas en cuanto a tiempo de cómputo al quitar la última parte del código, correspondiente a la escritura en disco de los autovectores. En la Figura 4.1 podemos ver los mallados completos de las placas Aluminio, CFRP1 y CFRP2, en la Figura 4.2 un detalle de dichos mallados, y en la Figura 4.3 una representación del elemento, con sus cuatro nodos.

Tamaño de los elementos	Tiempo	$f_1$	$f_5$	$f_{10}$	$f_{20}$
8.5×6.5 cm	≈ 1 segundo	48.024	139.081	252.414	427.939
2.5×2.5 cm	≈ 13 segundos	48.603	144.462	270.073	476.993
1×1 cm	≈ 3 minutos	48.665	145.044	272.005	480.830
<b>0.5×0.5 cm</b>	<b>≈ 25 minutos</b>	48.674	145.128	272.283	481.383
0.3̂×0.3̂ cm	≈ 77 minutos	48.675	145.144	272.335	481.486

Tabla 4.1: Tiempos de cálculo y frecuencias principales 1, 5, 10 y 20 para diferentes mallados de FEM en la placa Aluminio. Frecuencias en Hz.

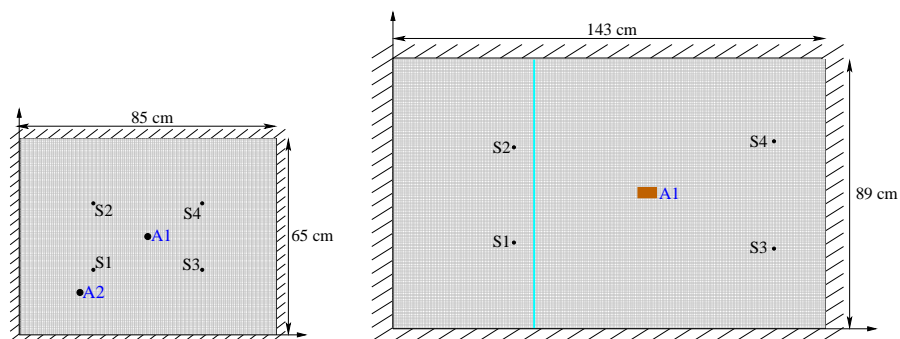


Figura 4.1: Mallados completos de la placas Aluminio y CFRP1 (izquierda) y CFRP2 (derecha).

Es destacable el hecho de que en las simulaciones FEM la convergencia de las frecuencias es siempre creciente, por lo que estas nos proporcionan una cota inferior



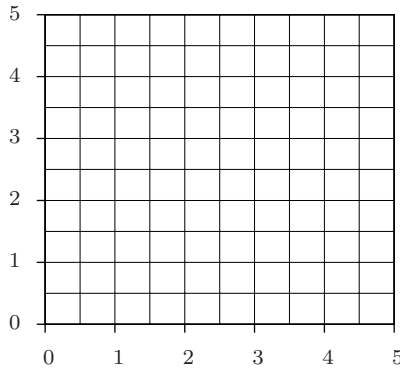


Figura 4.2: Detalle de los mallados usados en las simulaciones FEM. Medidas en cm.

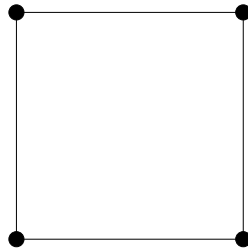


Figura 4.3: Elemento SHELL1 de cuatro nodos.

para las frecuencias teóricas. Este hecho no tiene por qué ser cierto para la técnica de simulación FEM en general, si no que depende del tipo de elemento finito usado.

### Placa CFRP1

La segunda placa estudiada fue la placa CFRP1, cuyas propiedades se pueden ver en la Tabla 3.2. Para estudiar esta placa mediante simulación por elementos finitos mediante el programa FEAP, se debió resolver previamente el problema de que dicho programa no soporta implementación de materiales por capas, mientras que las constantes ingenieriles de las que disponemos están dadas en función de las fibras, es decir, para cada capa. Para ello se cuenta con dos posibles soluciones: introducir directamente como entrada el tensor de rigidez  $\mathbb{Q}$ , o bien, calcular las

constantes ingenieriles que debería tener una placa ortótropa monodireccional para que tuviera el mismo comportamiento que la placa que se quiere estudiar. Esta última fue la solución usada.

Para calcular estas constantes se parte de las expresiones para obtener el tensor de rigidez a flexión  $\mathbb{D}$  en una placa monodireccional, trabajando en el sistema de coordenadas propio:

$$D_{11} = \frac{h^3}{12}Q_{11} = \frac{h^3}{12} \frac{E_L^2}{(E_L - E_T\nu^2)}, \quad (4.3a)$$

$$D_{12} = D_{21} = \frac{h^3}{12}Q_{12} = \frac{h^3}{12} \frac{E_L E_T \nu}{(E_L - E_T\nu^2)}, \quad (4.3b)$$

$$D_{22} = \frac{h^3}{12}Q_{22} = \frac{h^3}{12} \frac{E_L E_T}{(E_L - E_T\nu^2)}, \quad (4.3c)$$

$$D_{33} = \frac{h^3}{12}Q_{33} = \frac{h^3}{12}G, \quad (4.3d)$$

$$D_{13} = D_{31} = D_{23} = D_{32} = 0. \quad (4.3e)$$

Una vez calculado el tensor  $\mathbb{D}$  (de forma usual mediante integración por capas), se despejan las constantes ingenieriles de las ecuaciones anteriores, obteniendo:

$$E_L = \frac{12}{h^3}D_{11} \left(1 - \frac{D_{12}^2}{D_{11}D_{22}}\right), \quad (4.4a)$$

$$E_T = \frac{12}{h^3}D_{22} \left(1 - \frac{D_{12}^2}{D_{11}D_{22}}\right), \quad (4.4b)$$

$$G = \frac{12}{h^3}D_{33}, \quad (4.4c)$$

$$\nu = \frac{D_{12}}{D_{22}}, \quad (4.4d)$$

donde  $h$  es el espesor total de la placa.

De esta forma se obtienen las constantes ingenieriles que debería tener una placa ortótropa monodireccional para que tuviera el mismo comportamiento que la placa CFRP1. En la Tabla 4.2 se pueden observar las constantes ingenieriles que se obtuvieron y que se usaron como parámetros de entrada de la simulación.

Respecto a la implementación, los únicos cambios respecto a la placa Aluminio

#### 4.1. Análisis modal: modos y frecuencias

---

fueron los parámetros de entrada y la definición del material.

Placa monodireccional equivalente a la placa CFRP1

Módulo de Young longitudinal a las fibras ( $E_L$ )	$9.903409 \times 10^{10}$ Pa
Módulo de Young transversal a las fibras ( $E_T$ )	$6.406603 \times 10^{10}$ Pa
Módulo de Poisson ( $\nu$ )	0.076138
Módulo de cizalladura ( $G$ )	$5 \times 10^9$ Pa
Número de capas	1
Espesor ( $h$ )	2.1 mm

Tabla 4.2: Constantes ingenieriles de una placa monodireccional equivalente a la placa CFRP1.

Por su parte, los parámetros fueron los siguientes (siempre en Sistema Internacional):

```

PARAMeter
a = 0.85          ! lado largo (eje x)
b = 0.65          ! lado corto (eje y)
h = 0.0021        ! espesor
ex = 9.903409E+10 ! módulo de Young longitudinal
ey = 6.406603E+10 ! módulo de Young transversal
nu = 0.076138     ! módulo de Poisson
g = 5.0E+09       ! módulo de cizalladura
d = 1727          ! densidad
m = 170           ! divisiones del mallado según el eje x
n = 130           ! divisiones del mallado según el eje y
    
```

En el caso del material, para esta placa se debe describir como ortótropo:

```

MATERial, 1
SHELL
ELASTic, ORTHotropic, ex, ey, ey, nu, nu, nu, g, g, g ! mat. ortótropo
DENSity, , d
THICKness, , h
    
```

Los resultados obtenidos mediante esta técnica para la placa CFRP1 se pueden ver en la Tabla 4.5 para el caso de las frecuencias principales y en la Tabla A.2 para el caso de los modos de vibración.

## Placa CFRP2

La tercera placa estudiada es la placa CFRP2, cuyas propiedades se pueden ver en la Tabla 3.3. Esta placa, al ser anisótropa, y debido a la limitación de FEAP anteriormente comentada, nos obligó a introducir directamente como entrada el tensor de rigidez  $\mathbb{Q}$ . Respecto a las placas estudiadas anteriormente, por tanto, cambiaron los parámetros de entrada, el material y el mallado.

Respecto a los parámetros, no definiremos las constantes ingenieriles ya que no las usaremos en nuestro código. Los parámetros usados fueron:

```

PARAMeter
a = 1.43      ! lado largo (eje x)
a1 = 0.495   ! division parte gruesa/parte delgada
b = 0.89     ! lado corto (eje y)
h1 = 0.005394 ! espesor zona gruesa
h2 = 0.003828 ! espesor zona delgada
d = 1663.4   ! densidad
m1 = 99      ! divisiones del mallado según el eje x en la parte gruesa
m2 = 187     ! divisiones según el eje x en la parte delgada
n = 178      ! divisiones según el eje y
    
```

En el caso del material, se tuvieron que definir dos materiales diferentes, calculando previamente el tensor de rigidez  $\mathbb{Q}$  de cada uno de ellos. En el caso de realizar la aproximación bidimensional explicada en el Capítulo 2, el programa nos obligó a colocar la tercera fila y columna como la cuarta, añadiendo ceros en los huecos generados:

```

MATERial 1
  SHELL
  ELAStic MODULi 4
6.520723E+10  1.498008E+10  0.000000E+00  2.718625E+08
1.498008E+10  5.122279E+10  0.000000E+00  2.718625E+08
0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
2.718625E+08  2.718625E+08  0.000000E+00  1.684810E+10
DENSity,,d
THICK,,h1
    
```

```

MATERial,2
  SHELl
    ELAStic MODULi 4
5.734634E+10  1.654023E+10  0.000000E+00  1.106353E+09
1.654023E+10  5.596339E+10  0.000000E+00  1.106353E+09
0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1.106353E+09  1.106353E+09  0.000000E+00  1.840824E+10
DENSity,,d
THICK,,h2
    
```

Por último, en el caso del mallado, se implementó en dos partes, una para cada espesor, quedando de la siguiente forma:

```

BLOCk 1                                BLOCk 2
CART, m1, n, , , 1                    CART, m2, n, , , 2
1, 0.0, 0.0, 0.0                       1, a1, 0.0, 0.0
2, a1, 0.0, 0.0                         2, a, 0.0, 0.0
3, a1, b, 0.0                           3, a, b, 0.0
4, 0.0, b, 0.0                           4, a1, b, 0.0
    
```

Es necesario reseñar que en la implementación llevada a cabo el modelado del perfil de la placa no coincide con el perfil real, como se puede ver comparando la Figura 4.4 (donde se esquematiza el modelado de cambio de espesor) con la Figura 3.8 (donde se esquematiza el perfil real de la placa).

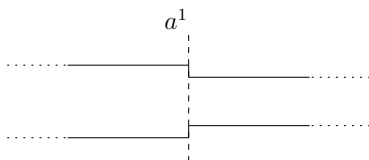


Figura 4.4: Perfil del modelo de placa CFRP2 en la zona de cambio de espesor.

Los resultados obtenidos mediante esta técnica para la placa CFRP2 se pueden ver en la Tabla 4.6 para el caso de las frecuencias principales y en la Tabla A.3 para el caso de los modos de vibración.

### 4.1.3 Cálculo semianalítico mediante el método de Ritz

En segundo lugar se presentan los resultados del análisis modal realizado mediante el método de Ritz (explicado en la Sección 2.2), que se ha llevado a cabo usando una implementación propia programada en el lenguaje de programación C. A continuación se describe la estructura del programa.

En primer lugar, los datos de entrada se proporcionan a través de la llamada a dos funciones (una con las constantes ingenieriles del material y otra con datos geométricos). Esto permite tener los datos de entrada centralizados para las distintas partes en las que deben usarse.

Las condiciones de contorno se imponen mediante dos cadenas de caracteres, indicando las condiciones impuestas en  $x = 0, a$  e  $y = 0, b$ . El siguiente paso consiste en calcular las funciones  $X_m(x)$  e  $Y_n(y)$ , en concreto los parámetros  $\gamma_m, A_m, B_m, C_m, D_m, \gamma_n, A_n, B_n, C_n$  y  $D_n$ . Puesto que en este apartado solo se ha usado placa empotrada en sus cuatro lados, no serán necesarios los parámetros  $\alpha, \beta, \delta$  y  $\epsilon$  (ver Apéndice B para más detalles).

Con estos datos se pueden calcular las matrices  $\mathbb{K}$  y  $\mathbb{M}$ , calculando las integrales analíticamente según se explica en el Apéndice B. Una vez calculadas las matrices, se calcula la inversa de  $\mathbb{M}$  ( $\mathbb{M}^{-1}$ ), se multiplica  $\mathbb{M}^{-1}$  por  $\mathbb{K}$  para obtener  $\mathbb{H}$  y se le calculan los autovalores y autovectores, todo ello mediante funciones estándar proporcionadas por las librerías *gsl* (*gnu scientific library*) [53]. Como se vió en la Sección 2.2, de los autovalores se obtienen con facilidad las frecuencias principales, y de los autovectores los modos de vibración. La Figura 4.5 esquematiza esta implementación.

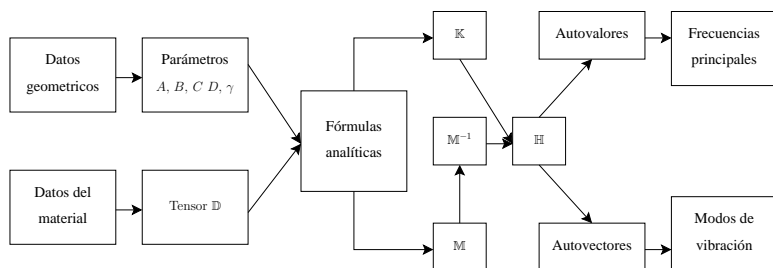


Figura 4.5: Diagrama de flujo de la implementación computacional para realizar los cálculos mediante el método de Ritz.

Para poder visualizar los modos de forma cómoda, se implementaron dos alternativas:

- Una función cuya salida era un macro en texto plano del programa *gnuplot* que al ejecutarlo representaba los modos de vibración directamente de los autovectores, que además nos proporciona la ventaja de poder visualizar estos de forma directa.
- Una función cuya salida era una malla de puntos (con el número de puntos deseado) correspondiente a cada modo de vibración.

En cuanto el número de términos del sumatorio, en todos los casos se usó  $M = N = 26$ , elección justificada más adelante en base a los resultados de la placa CFRP2. El tiempo de cálculo para la placa Aluminio fue de aproximadamente 20.5 segundos. Hay que tener en cuenta que este cálculo no incluye la visualización de los modos con *gnuplot*, que es bastante lenta, si bien la alternativa de crear una malla de puntos para cada modo solo consume aproximadamente 10 segundos más, dándonos un tiempo total del orden de 30 segundos (escribiendo en disco los 50 primeros modos).

### Placa Aluminio

Para la placa Aluminio sin daño, por ser uniforme en toda su área, y ser el material isótropo, la expresión (2.68) queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \left\{ \int_0^a \int_0^b \left[ D \left( \frac{d^2 X_i}{dx^2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} Y_j Y_n + X_i X_m \frac{d^2 Y_j}{dy^2} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \right) \right. \right. \\
 + \nu D \left( \frac{d^2 X_i}{dx^2} X_m Y_j \frac{d^2 Y_n}{dy^2} + X_i \frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{d^2 Y_j}{dy^2} Y_n \right) \\
 + 4 \left( \frac{1-\nu}{2} \right) D \frac{dX_i}{dx} \frac{dX_m}{dx} \frac{dY_j}{dy} \frac{dY_n}{dy} \left. \right] dx dy \\
 \left. - \int_0^a \int_0^b (\rho h \omega^2 X_i X_m Y_j Y_n) dx dy \right\} A_{mn} = 0; \\
 i = 1, \dots, M; \quad j = 1, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Los resultados obtenidos se pueden ver en la Tabla 4.4 para el caso de las frecuencias principales y en la Tabla A.1 para el caso de los modos de vibración.

### Placa CFRP1

En el caso de la placa CFRP1 el material es ortótropo y la placa uniforme en toda su área, por lo que la expresión (2.68) queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \left\{ \int_0^a \int_0^b \left[ D_{11} \frac{d^2 X_i}{dx^2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} Y_j Y_n + D_{22} X_i X_m \frac{d^2 Y_j}{dy^2} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \right. \right. \\
 \left. \left. + D_{12} \left( \frac{d^2 X_i}{dx^2} X_m Y_j \frac{d^2 Y_n}{dy^2} + X_i \frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{d^2 Y_j}{dy^2} Y_n \right) \right. \right. \\
 \left. \left. + 4D_{66} \frac{dX_i}{dx} \frac{dX_m}{dx} \frac{dY_j}{dy} \frac{dY_n}{dy} \right] dx dy \right. \\
 \left. - \int_0^a \int_0^b (\rho h \omega^2 X_i X_m Y_j Y_n) dx dy \right\} A_{mn} = 0; \\
 i = 1, \dots, M; \quad j = 1, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Los resultados obtenidos se pueden ver en la Tabla 4.5 para el caso de las frecuencias principales y en la Tabla A.2 para el caso de los modos de vibración.

### Placa CFRP2

En este caso el material es anisótropo, y al tener la placa dos zonas diferenciadas a lo largo del eje  $x$ , la expresión (2.68) queda como:

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \left\{ \int_0^{a^1} \int_0^b \left[ D_{11}^g \frac{d^2 X_i}{dx^2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} Y_j Y_n + D_{22}^g X_i X_m \frac{d^2 Y_j}{dy^2} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \right. \right. \\
 \left. \left. + D_{12}^g \left( \frac{d^2 X_i}{dx^2} X_m Y_j \frac{d^2 Y_n}{dy^2} + X_i \frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{d^2 Y_j}{dy^2} Y_n \right) + 4D_{66}^g \frac{dX_i}{dx} \frac{dX_m}{dx} \frac{dY_j}{dy} \frac{dY_n}{dy} \right. \right. \\
 \left. \left. + 2D_{16}^g \left( \frac{d^2 X_i}{dx^2} \frac{dX_m}{dx} Y_j \frac{dY_n}{dy} + \frac{dX_i}{dx} \frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{dY_j}{dy} Y_n \right) \right. \right. \\
 \left. \left. + 2D_{26}^g \left( \frac{dX_i}{dx} X_m \frac{dY_j}{dy} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} + X_i \frac{dX_m}{dx} \frac{d^2 Y_j}{dy^2} \frac{dY_n}{dy} \right) \right] dx dy \right. \\
 \left. + \int_{a^1}^a \int_0^b \left[ D_{11}^d \frac{d^2 X_i}{dx^2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} Y_j Y_n + D_{22}^d X_i X_m \frac{d^2 Y_j}{dy^2} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \right. \right. \\
 \left. \left. + D_{12}^d \left( \frac{d^2 X_i}{dx^2} X_m Y_j \frac{d^2 Y_n}{dy^2} + X_i \frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{d^2 Y_j}{dy^2} Y_n \right) + 4D_{66}^d \frac{dX_i}{dx} \frac{dX_m}{dx} \frac{dY_j}{dy} \frac{dY_n}{dy} \right] dx dy \right\} A_{mn} = 0; \\
 i = 1, \dots, M; \quad j = 1, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$



$$\begin{aligned}
 & +2D_{16}^d \left( \frac{d^2 X_i}{dx^2} \frac{dX_m}{dx} Y_j \frac{dY_n}{dy} + \frac{dX_i}{dx} \frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{dY_j}{dy} Y_n \right) \\
 & +2D_{26}^d \left( \frac{dX_i}{dx} X_m \frac{dY_j}{dy} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} + X_i \frac{dX_m}{dx} \frac{d^2 Y_j}{dy^2} \frac{dY_n}{dy} \right) \Big] dx dy \\
 & - \int_0^{a^1} \int_0^b (\rho h^g \omega^2 X_i X_m Y_j Y_n) dx dy \\
 & - \int_{a^1}^a \int_0^b (\rho h^d \omega^2 X_i X_m Y_j Y_n) dx dy \Big\} A_{mn} = 0; \\
 & \quad i = 1, \dots, M; \quad j = 1, \dots, N.
 \end{aligned}$$

donde los superíndices  $g$  y  $d$  se refieren a la parte gruesa y a la parte delgada, respectivamente.

Es necesario señalar que, al igual que en las simulaciones FEM, el modelado del perfil de la placa no coincide con el perfil real.

Los resultados obtenidos se pueden ver en la Tabla 4.6 para el caso de las frecuencias principales y en la Tabla A.3 para el caso de los modos de vibración.

En cuanto a la elección del número de términos en los sumatorios, se hizo un estudio de convergencia de frecuencias y modos. La convergencia en frecuencias es bastante buena, como se puede observar en la Tabla 4.3. Sin embargo, al ser una placa con unos modos de vibración complejos, la convergencia de los modos es más lenta. Para verlo se ha elegido el modo 3 y se ha comparado con el modo obtenido en FEM, como se puede ver en la Figura 4.6. Esta lentitud hace necesario usar el mayor número de términos posible, que en el caso de las características del ordenador usado (descrito en la sección anterior) fueron  $M = N = 26$ , ya que para valores mayores se producía un desbordamiento de memoria. Si bien para placas más simples no sería necesario usar tantos términos, sí puede serlo para reproducir correctamente los modos de placas simples con defectos.

Estas diferencias pueden deberse al hecho de que el método de Ritz no tiene en cuenta las condiciones de continuidad en placas con diferentes zonas, siendo necesario un mayor número de términos para aproximarse mejor a los modos reales. A pesar de eso, las diferencias son pequeñas.

Si comparamos los tiempos de cómputo con los presentados en la Sección 4.1.2, queda totalmente clara la conveniencia de usar el método de Ritz frente a las simulaciones FEM para el cálculo de frecuencias y modos propios, especialmente en el caso de placas sencillas.

$M = N$	Tiempo	$f_1$	$f_5$	$f_{10}$	$f_{20}$
5	$\approx 2.5$ segundos	36.520	110.485	191.499	–
10	$\approx 3.5$ segundos	36.511	110.074	187.559	337.110
15	$\approx 6$ segundos	36.508	110.021	186.758	336.489
20	$\approx 11.5$ segundos	36.507	109.991	186.418	336.359
<b>26</b>	<b><math>\approx 33</math> segundos</b>	36.506	109.977	186.235	336.295
FEM		36.503	109.918	185.588	336.122

Tabla 4.3: Tiempos de cálculo y frecuencias 1, 5, 10 y 20 para cálculos mediante el método de Ritz con diferente número de términos para la placa CFRP2. Frecuencias en Hz.

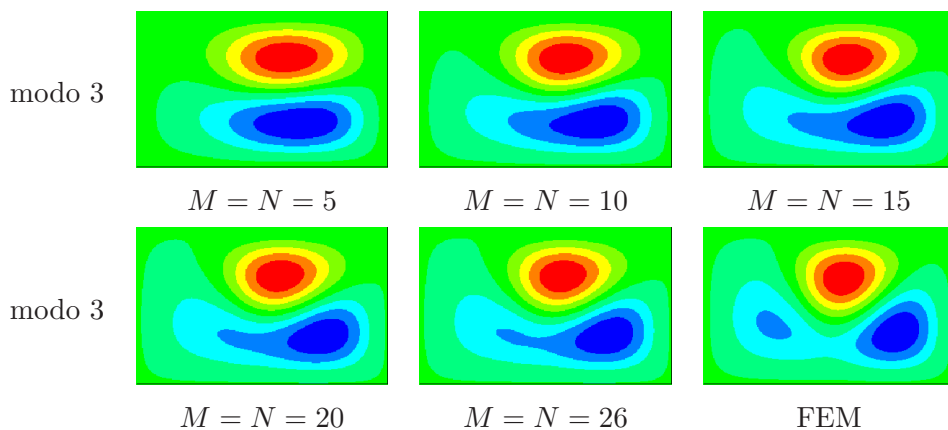


Figura 4.6: Modo 3 de la placa CFRP2 calculado mediante el método de Ritz con diferente número de términos y con FEM.

Es destacable que en cálculos mediante el método de Ritz la convergencia de las frecuencias es siempre decreciente, por lo que estas nos proporcionan una cota superior para las frecuencias teóricas. Este hecho se justifica si tenemos en cuenta que, según Reddy [113], en el método de Ritz el sistema aproximado será siempre más rígido que el real, y en consecuencia sus frecuencias serán mayores. Esto, unido a que según vimos en la sección anterior, las simulaciones FEM nos proporcionan una cota inferior, se puede concluir que en nuestro caso, el uso conjunto de ambas técnicas nos proporciona los valores de las frecuencias teóricas para una placa de propiedades determinadas con un error totalmente acotado.

#### 4.1.4 Ensayos experimentales

Por último, se presentan los resultados del análisis en frecuencia de los ensayos experimentales. Partiendo de las señales experimentales (que serán analizadas en la Sección 4.2), se obtuvo la Función de Respuesta en Frecuencia (FRF) de forma similar a la explicada en la Sección 3.8. En las placas Aluminio y CFRP1, puesto que se dispuso de dos actuadores, se repitió el proceso para cada uno de ellos. Una vez se dispone de las diferentes FRFs, se identificaron los valores de los picos, que corresponden con las frecuencias principales de la placa.

Para ello, en las placas Aluminio y CFRP1 se tuvieron en cuenta que en los ensayos realizados con el actuador A1 algunas frecuencias tuvieron picos de mayor amplitud ya que, al estar centrado el actuador, los modos en los que el centro no es un nodo de vibración se activaron más que los demás. Para saber cuales son estos modos se realizó un cálculo (con parámetros aproximados) mediante el método de Ritz. A estos modos se les ha llamado **modos activos para el actuador A1**. Usando la información de estos modos activos y las FRFs obtenidas de las señales experimentales (usando A1 y A2 como actuadores), se identificaron los primeros modos de las placas.

En el caso de la placa CFRP2 solo se dispuso de un actuador, por lo que se debieron identificar los modos haciendo uso de un solo tipo de ensayo. Sin embargo en este caso, al no estar los sensores simétricamente dispuestos, se pudieron usar las FRFs de los diferentes sensores dentro del mismo ensayo, de forma que picos que en un sensor no se aprecian, pueden ser apreciados en otro.

#### Placa Aluminio

Para esta placa se obtuvo que el centro vibra en los modos 1, 4, 7, 11, 12 y 19 (dentro de los 20 primeros), siendo estos los modos activos para el actuador A1. Con esta información se pueden identificar los primeros 20 modos, obteniendo las frecuencias detalladas en la Tabla 4.4. En la Figura 4.7 se pueden ver dos ejemplos de FRF experimental, que serán estudiadas con más detalle en la Sección 4.2.

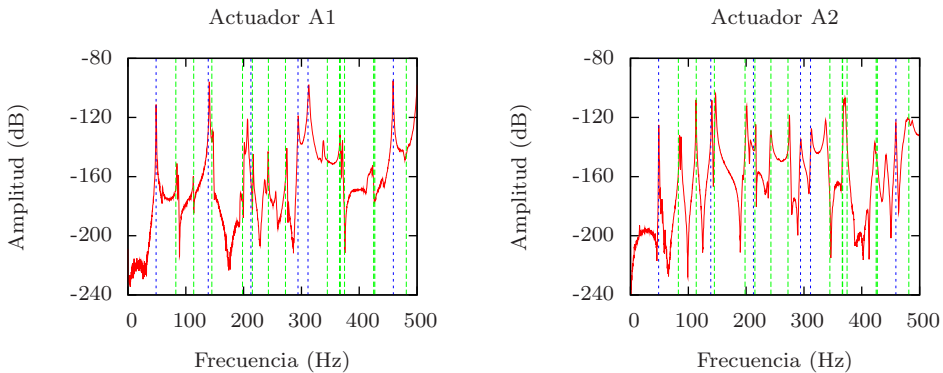


Figura 4.7: Ejemplo de FRF de la placa Aluminio en el sensor S1, excitando con los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha). Con líneas azules verticales se indican las frecuencias de los modos activos para el actuador A1 obtenidos con simulación modal mediante FEM. Con líneas verdes verticales el resto de modos.

### Placa CFRP1

Para esta placa el procedimiento es análogo al de la placa Aluminio, teniendo en cuenta que en este caso los modos activos para el actuador A1 son los modos 1, 5, 7, 10, 15, 18 y 20 (dentro de los 20 primeros), y que los modos 18 y 19 están muy próximos, por lo que se consideró que no pueden ser discernidos experimentalmente y por tanto se tomó el mismo valor de frecuencia experimental para los dos. De esta forma se pueden identificar los primeros 20 modos de la placa, obteniendo las frecuencias detalladas en la Tabla 4.5. En la Figura 4.8 se pueden ver dos ejemplos de FRF experimental, que serán estudiadas con más detalle en la Sección 4.2.

### Placa CFRP2

Para esta placa se consideró que los modos 3 y 4 están muy próximos, por lo que no pudieron ser discernidos experimentalmente, tomándose el mismo valor de frecuencia experimental para ambos. En este caso se pudieron identificar los primeros 16 modos de la placa, obteniendo las frecuencias detalladas en la Tabla 4.6. En la Figura 4.9 se puede ver un ejemplo de FRF experimental.

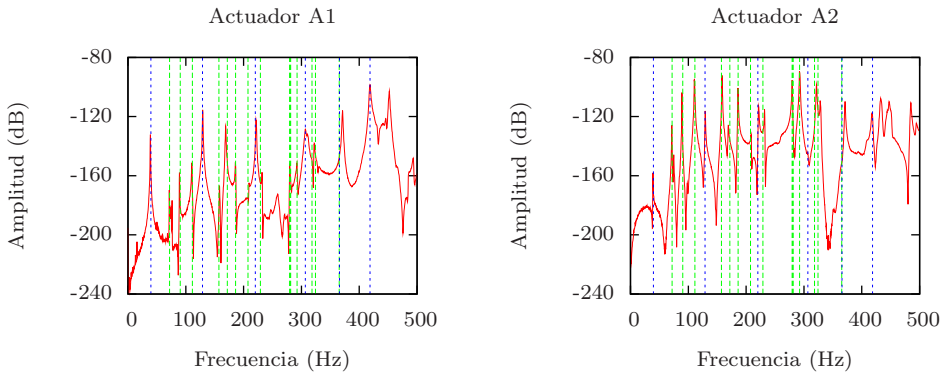


Figura 4.8: Ejemplo de FRF de la placa CFRP1 en el sensor S1 y excitando con los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha). Con líneas azules verticales se indican las frecuencias de los modos activos para el actuador A1 obtenidos con simulación modal mediante FEM. Con líneas verdes verticales el resto de modos.

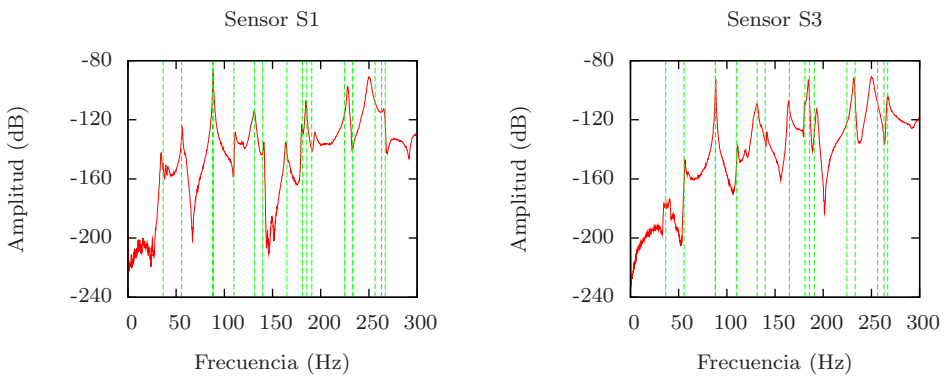


Figura 4.9: Ejemplo de FRF de la placa CFRP2 excitando con el actuador A1 y midiendo con el sensor S1 (izquierda) y S3 (derecha). Con líneas verdes verticales se indican las frecuencias obtenidas con simulación modal mediante FEM.

### 4.1.5 Comparación FEM-Ritz-Experimento. Discusión

#### Placa Aluminio

- Frecuencias principales

En la Tabla 4.4 se puede observar una comparación entre los resultados obtenidos con los tres métodos. Aunque para comparar con la frecuencia experimental solo sería necesario usar dos decimales, ya que el error experimental es de 0.25 Hz, en la Tabla se detallan los tres primeros decimales para las frecuencias calculadas mediante método de Ritz y simulación FEM, con objeto de tener una mejor comparación entre ambos resultados.

Tal y como se comentó en secciones anteriores, las frecuencias obtenidas mediante el método de Ritz son siempre mayores que las obtenidas con FEM, y las frecuencias teóricas deben estar comprendidas entre ambos valores, que las acotan superior e inferiormente. Los valores obtenidos mediante FEM y Ritz son bastante próximas, siendo la mayor diferencia relativa entre ellos del 0.1 %, como se puede ver en la Tabla A.1 del Apéndice A.

En cuanto a los resultados experimentales, se puede concluir que el ajuste es bastante bueno, siendo las mayores diferencias registradas de 2.85/2.87 % (modo 7), -2.29/-2.28 % (modo 2) y 1.95/1.97 % (modo 13). Estas diferencias pueden deberse a:

- Defectos de fabricación de la placa (la placa estaba ligeramente combada y el espesor no era perfectamente uniforme, como se comentó en la Sección 3.2).
- Posibles errores del sistema de medida.
- Imperfecciones en el material de la placa (que se ha modelado como aluminio puro).
- Imperfecciones en las condiciones de contorno, ya que como es sabido la condición teórica de placa empotrada no puede ser reproducida con total exactitud en el laboratorio.
- Errores asociados al uso de un modelo muy simple, como es el modelo de Kirchoff.

	Experimental	Simulación FEM	Cálculo Ritz
Modo 1	48.750 Hz	48.674 Hz(-0.16 %)	48.677 Hz (-0.15 %)
Modo 2	84.750 Hz	82.806 Hz(-2.29 %)	82.818 Hz (-2.28 %)
Modo 3	113.000 Hz	113.671 Hz(+0.59 %)	113.684 Hz (+0.61 %)
Modo 4	140.750 Hz	138.764 Hz(-1.41 %)	138.788 Hz (-1.39 %)
Modo 5	146.750 Hz	145.128 Hz(-1.11 %)	145.165 Hz (-1.08 %)
Modo 6	201.250 Hz	198.165 Hz(-1.53 %)	198.239 Hz (-1.50 %)
Modo 7	206.750 Hz	212.650 Hz(+2.85 %)	212.683 Hz (+2.87 %)
Modo 8	216.750 Hz	215.093 Hz(-0.76 %)	215.138 Hz (-0.74 %)
Modo 9	242.500 Hz	242.961 Hz(+0.19 %)	243.040 Hz (+0.22 %)
Modo 10	274.750 Hz	272.283 Hz(-0.90 %)	272.410 Hz (-0.85 %)
Modo 11	294.250 Hz	294.094 Hz(-0.05 %)	294.249 Hz (-0.00 %)
Modo 12	312.750 Hz	311.236 Hz(-0.48 %)	311.314 Hz (-0.46 %)
Modo 13	338.250 Hz	344.858 Hz(+1.95 %)	344.929 Hz (+1.97 %)
Modo 14	366.750 Hz	366.197 Hz(-0.15 %)	366.454 Hz (-0.08 %)
Modo 15	367.750 Hz	366.847 Hz(-0.25 %)	367.044 Hz (-0.19 %)
Modo 16	370.750 Hz	374.642 Hz(+1.05 %)	374.789 Hz (+1.09 %)
Modo 17	421.500 Hz	424.742 Hz(+0.77 %)	425.013 Hz (+0.83 %)
Modo 18	423.500 Hz	426.896 Hz(+0.80 %)	427.023 Hz (+0.83 %)
Modo 19	458.500 Hz	458.954 Hz(+0.10 %)	459.346 Hz (+0.18 %)
Modo 20	479.500 Hz	481.383 Hz(+0.39 %)	481.674 Hz (+0.45 %)

Tabla 4.4: Comparación de los valores de las frecuencias principales de la placa Aluminio obtenidos mediante tres métodos diferentes. Valor y error porcentual respecto del valor experimental.

- Modos de vibración

En cuanto a los modos de vibración, en la Tabla A.1 del Apéndice A podemos observar que los modos calculados mediante simulación FEM y mediante el método de Ritz son prácticamente indistinguibles a simple vista.

### Placa CFRP1

- Frecuencias principales

En la Tabla 4.5 se puede observar una comparación entre los resultados obtenidos con los tres métodos. Los valores obtenidos mediante FEM y Ritz son bastante

próximos, siendo la mayor diferencia relativa entre ellos del 0.1 %, como se puede ver en la Tabla A.2 del Apéndice A.

En cuanto a los resultados experimentales, las mayores diferencias registradas son de 2.08/ 2.09 % (modo 1), 1.70/1.71 % (modo 3) y 1.66/1.67 % (modo 7). Estas discrepancias pueden deberse a:

- La rugosidad que presentaba la placa por una de sus caras (comentada en la Sección 3.2), ya que el modelo supone caras perfectamente planas.
  - Posibles errores del sistema de medida.
  - Una mala caracterización del material por parte del fabricante.
  - Imperfecciones en las condiciones de contorno, ya que como es sabido la condición teórica de placa empotrada no puede ser reproducida con total exactitud en el laboratorio.
  - Errores asociados al uso de un modelo muy simple, como es el modelo de Kirchoff.
- Modos de vibración

En cuanto a los modos de vibración, en la Tabla A.2 del Apéndice A podemos observar que al igual que en la placa Aluminio, los modos calculados mediante simulación FEM y mediante el método de Ritz son practicamente indistinguibles a simple vista.

## Placa CFRP2

- Frecuencias principales

En la Tabla 4.6 se puede observar una comparación entre los resultados obtenidos con los tres métodos. Los valores obtenidos mediante FEM y Ritz tienen unos valores más lejanos para esta placa que para las otras, siendo la mayor diferencia porcentual de 0.37 %, como se puede ver en la Tabla A.3 del Apéndice A.

En cuanto a los resultados experimentales, el ajuste no es tan bueno como en las otras placas, ya que se han podido identificar menos frecuencias que en las otras placas estudiadas. Además, la primera frecuencia presenta un error relativo bastante alto, en concreto del 5.81 %. El resto de frecuencias presenta un mejor ajuste,



	Experimental	Simulación FEM	Cálculo Ritz
Modo 1	38.750 Hz	39.557 Hz(+2.08 %)	39.559 Hz (+2.09 %)
Modo 2	71.500 Hz	71.907 Hz(+0.57 %)	71.913 Hz (+0.58 %)
Modo 3	89.000 Hz	90.511 Hz(+1.70 %)	90.518 Hz (+1.71 %)
Modo 4	110.250 Hz	111.319 Hz(+0.97 %)	111.342 Hz (+0.99 %)
Modo 5	129.250 Hz	128.854 Hz(-0.31 %)	128.868 Hz (-0.30 %)
Modo 6	158.250 Hz	157.338 Hz(-0.58 %)	157.385 Hz (-0.55 %)
Modo 7	169.000 Hz	171.806 Hz(+1.66 %)	171.822 Hz (+1.67 %)
Modo 8	185.750 Hz	186.125 Hz(+0.20 %)	186.171 Hz (+0.23 %)
Modo 9	209.500 Hz	207.479 Hz(-0.96 %)	207.505 Hz (-0.95 %)
Modo 10	221.500 Hz	220.168 Hz(-0.60 %)	220.263 Hz (-0.56 %)
Modo 11	231.750 Hz	229.058 Hz(-1.16 %)	229.136 Hz (-1.13 %)
Modo 12	279.750 Hz	279.630 Hz(-0.04 %)	279.794 Hz (+0.02 %)
Modo 13	283.250 Hz	281.295 Hz(-0.69 %)	281.330 Hz (-0.68 %)
Modo 14	292.250 Hz	292.426 Hz(+0.06 %)	292.505 Hz (+0.09 %)
Modo 15	307.000 Hz	306.746 Hz(-0.08 %)	306.790 Hz (-0.07 %)
Modo 16	321.750 Hz	318.345 Hz(-1.06 %)	318.504 Hz (-1.01 %)
Modo 17	328.000 Hz	324.224 Hz(-1.15 %)	324.343 Hz (-1.11 %)
Modo 18	371.000 Hz	365.212 Hz(-1.56 %)	365.459 Hz (-1.49 %)
Modo 19	371.000 Hz	365.803 Hz(-1.40 %)	366.077 Hz (-1.33 %)
Modo 20	417.750 Hz	418.529 Hz(+0.19 %)	418.597 Hz (+0.20 %)

Tabla 4.5: Comparación de los valores de las frecuencias principales de la placa CFRP1 obtenidos mediante tres métodos diferentes.

siendo las mayores diferencias de 2.56/2.93 % (modo 14), -1.81/-1.78 % (modo 11) y -1.62/-1.44 % (modo 2). Estas discrepancias pueden tener diversos motivos:

- La rugosidad que presentaba la placa por una de sus caras (ya que el modelo supone caras perfectamente planas).
- Posibles errores del sistema de medida.
- Una mala caracterización del material por parte del fabricante.
- La diferencia entre el perfil real y el perfil usado en el modelo (véanse las Figuras 3.8 y 4.4).
- Tensiones térmicas al no haberse podido aplicar el punto 5 del protocolo experimental (ver Sección 7.1.6).

	Experimental	Simulación FEM	Cálculo Ritz
Modo 1	34.500 Hz	36.503 Hz(+5.81 %)	36.506 Hz (+5.81 %)
Modo 2	56.500 Hz	55.583 Hz(-1.62 %)	55.685 Hz (-1.44 %)
Modo 3	88.500 Hz	87.942 Hz(-0.63 %)	88.005 Hz (-0.56 %)
Modo 4	88.500 Hz	88.271 Hz(-0.26 %)	88.396 Hz (-0.12 %)
Modo 5	111.250 Hz	109.918 Hz(-1.20 %)	109.977 Hz (-1.14 %)
Modo 6	131.000 Hz	131.518 Hz(+0.40 %)	131.553 Hz (+0.42 %)
Modo 7	141.000 Hz	139.730 Hz(-0.90 %)	139.946 Hz (-0.75 %)
Modo 8	164.000 Hz	164.949 Hz(+0.58 %)	164.975 Hz (+0.59 %)
Modo 9	180.250 Hz	180.957 Hz(+0.39 %)	181.035 Hz (+0.44 %)
Modo 10	184.750 Hz	185.588 Hz(+0.45 %)	186.235 Hz (+0.80 %)
Modo 11	194.250 Hz	190.729 Hz(-1.81 %)	190.784 Hz (-1.78 %)
Modo 12	228.000 Hz	224.577 Hz(-1.50 %)	224.821 Hz (-1.39 %)
Modo 13	231.750 Hz	233.036 Hz(+0.55 %)	233.572 Hz (+0.79 %)
Modo 14	250.000 Hz	256.394 Hz(+2.56 %)	257.331 Hz (+2.93 %)
Modo 15	265.500 Hz	263.090 Hz(-0.91 %)	263.301 Hz (-0.83 %)
Modo 16	267.000 Hz	266.962 Hz(-0.01 %)	267.017 Hz (+0.01 %)

Tabla 4.6: Comparación de los valores de las frecuencias principales de la placa CFRP2 obtenidos mediante tres métodos diferentes.

- Imperfecciones en las condiciones de contorno, en esta placa más aun que las anteriores (por tener menor torque aplicado).
- Errores asociados al uso de un modelo muy simple, como es el modelo de Kirchoff.

- Modos de vibración

Por último en cuanto a los modos de vibración de la placa CFRP2, en la Tabla A.3 del Apéndice A podemos observar que la mayoría de modos son practicamente indistinguibles a simple vista, pero para algunos sí hay pequeñas diferencias, como por ejemplo para los modos 3 y 4.

## 4.2 Análisis transitorio: Respuesta en el Dominio del Tiempo

### 4.2.1 Medida experimental del coeficiente de amortiguamiento

En esta Sección se describen las medidas experimentales realizadas para obtener el coeficiente de amortiguamiento para las distintas placas. Para ello, las placas se excitaron desde el actuador A1 con una señal senoidal de baja frecuencia cercana a una resonancia, dejando que la placa alcance el estado estacionario, y cortando la excitación mediante el giro de la rueda de ganancia del amplificador hasta la posición cero de la forma más rápida posible. Esta metodología proporciona una señal senoidal de amplitud decreciente bastante pura. Otros métodos, como implementar desde el equipo PULSE® que la excitación se detuviera en un momento concreto, o desconectar el amplificador, no conseguían generar una señal senoidal pura, al mezclarse la excitación senoidal con señales tipo pulso (de origen mecánico en el primer caso y electromagnético en el segundo).

Una vez obtenidas las señales, el coeficiente de amortiguamiento  $\xi$  se puede calcular haciendo uso de la siguiente expresión [20]:

$$\xi = \frac{\ln\left(\frac{A_n}{A_{n+r}}\right)}{2\pi r}, \quad (4.8)$$

donde  $A_n$  es la amplitud de un pico determinado de la señal y  $A_{n+r}$  la amplitud  $r$  picos después. Para evitar los posibles efectos del tiempo que se tarda en girar la rueda, se eligió el primer pico una vez ya comenzado el descenso, y se calculó  $\xi$  usando cada uno de los picos y el siguiente ( $r = 1$ ), hasta que la señal fue demasiado baja, obteniendo de esta forma una distribución de valores de  $\xi$ . Se repitieron los cálculos con  $r = 2, 3$  y  $4$ , siendo el resultado el mismo que con  $r = 1$  en todas las placas. A continuación se exponen los resultados para cada placa, que quedan resumidos en la Tabla 4.7.

### Placa Aluminio

Procediendo según se ha descrito en el apartado anterior se midió el coeficiente de amortiguamiento  $\xi$  de la placa Aluminio usando el sensor S1 y una excitación

senoidal de 50 Hz. La distribución obtenida tenía media 0.0027 y desviación típica 0.0006, sin observarse diferencias significativas en el valor medio al usar otros sensores. En la Figura 4.10 se puede observar una vista global de la señal usada (izquierda) y una ampliación de la zona de decrecimiento exponencial (derecha). En la vista global se pueden distinguir tres zonas: transitoria, estacionaria y de decrecimiento (igualmente será así en las otras dos placas estudiadas).

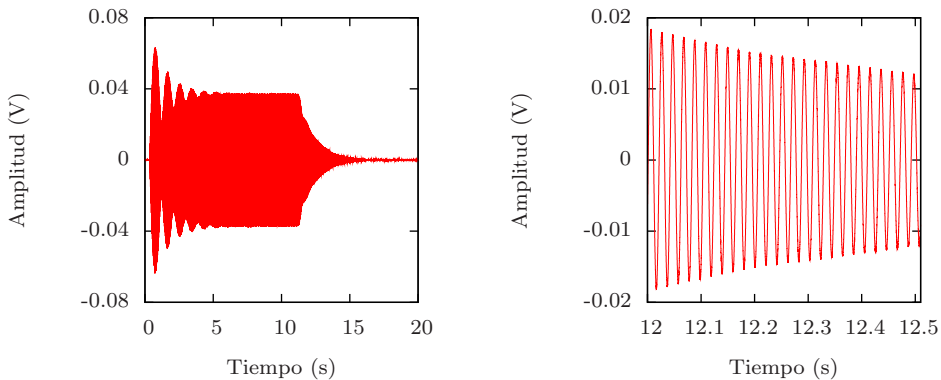


Figura 4.10: Señales amortiguadas de la placa Aluminio, vista global (izquierda) y ampliada (derecha).

### Placa CFRP1

Para la placa CFRP1 se usó una excitación senoidal de 40 Hz. La distribución de coeficientes de amortiguamiento  $\xi$  tuvo media 0.0037 y desviación típica 0.0011 usando el sensor S1, sin observarse diferencias significativas en el valor medio al usar otros sensores. En la Figura 4.11 se puede observar una vista global de la señal usada (izquierda) y una ampliación de la zona de decrecimiento exponencial (derecha).

### Placa CFRP2

Para la placa CFRP2, al tener dos partes claramente diferenciadas, se comprobó que el coeficiente de amortiguamiento  $\xi$  era el mismo en ambas. La excitación usada fue senoidal con frecuencia 88 Hz. La distribución de coeficientes de amortiguamiento

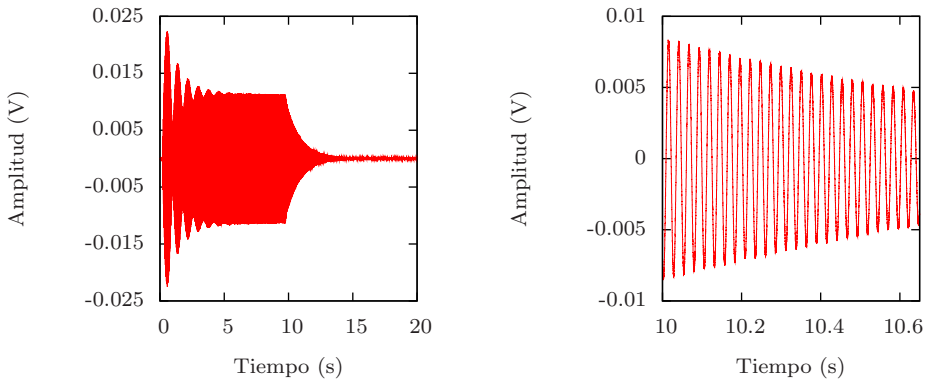


Figura 4.11: Señales amortiguadas de la placa CFRP1, vista global (izquierda) y ampliada (derecha).

$\xi$  tuvo media 0.0050 en todos los casos, siendo la desviación típica 0.0008 para el sensor S1 (parte gruesa) y 0.0003 para el sensor S3 (parte delgada). En la Figura 4.12 se puede observar una vista global de la señal usada (izquierda) y una ampliación de la zona de decrecimiento exponencial (derecha) tanto de la parte gruesa (arriba) como de la delgada (abajo).

	Placa Aluminio	Placa CFRP1	Placa CFRP2	
			Parte delgada	Parte gruesa
$\xi$	0.0027	0.0037	0.0050	0.0050

Tabla 4.7: Coeficientes de amortiguamiento de las distintas placas usadas en este trabajo.

### 4.2.2 Simulación mediante FEM

En esta Sección se describen las implementaciones llevadas a cabo para las simulaciones transitorias con FEM. Tomando como base lo explicado en la Sección 4.1.2, a continuación se exponen las diferencias con aquella implementación.

La primera diferencia es a la hora de definir los parámetros, ya que se deben incorporar algunos nuevos:

- El incremento de tiempo ( $dt$ ), que coincide con la inversa de la frecuencia

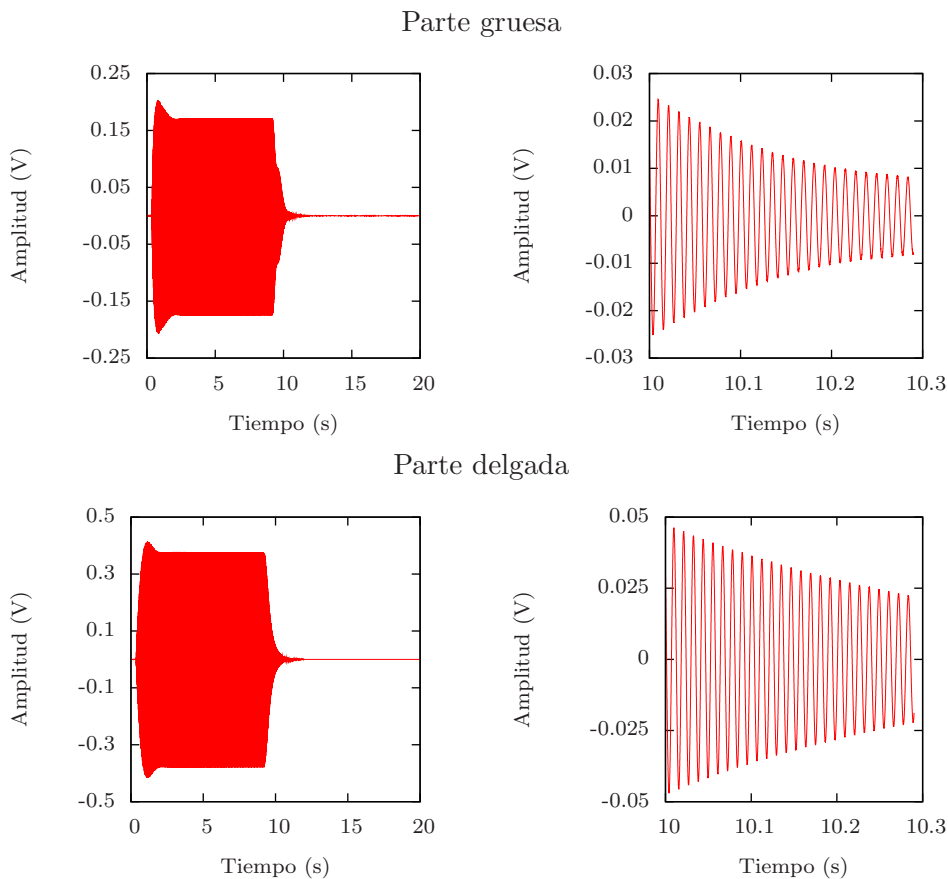


Figura 4.12: Señales amortiguadas de la placa CFRP2 en su parte gruesa (arriba) y delgada (abajo), vista global (izquierda) y ampliada (derecha).

de muestreo. Se usó la misma frecuencia de muestreo que en la mayoría de experimentos (4096 Hz), siendo por tanto el incremento de tiempo  $1/4096$  s.

- El número de muestras ( $nm$ ), de forma que el producto  $nm \times dt$  sea el tiempo total de simulación. Al ser la frecuencia de muestreo de 4096 Hz, cada 4096 cuentas serán un segundo de simulación. En este caso se eligieron simulaciones de 30 s, por ser el tiempo de medida usado en la mayoría de experimentos.
- El coeficiente de amortiguamiento, medido según se explica en la sección anterior. El modelo de amortiguamiento usado es el de Rayleigh, según el cual

la matriz de amortiguamiento ( $\mathbb{C}$ ) es proporcional a las matrices de rigidez ( $\mathbb{K}$ ) y de masa ( $\mathbb{M}$ ), siendo las constantes de proporcionalidad los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ .

$$\mathbb{C} = \alpha\mathbb{K} + \beta\mathbb{M}. \quad (4.9)$$

Haciendo uso del manual de FEAP [125], partiendo del coeficiente de amortiguamiento y definiendo las frecuencias de trabajo mínima ( $f_{min}$ ) y máxima ( $f_{max}$ ) podemos calcular los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ .

$$\alpha = \frac{2\xi f_{min} f_{max}}{f_{min} + f_{max}}, \quad (4.10)$$

$$\beta = \frac{2\xi}{f_{min} + f_{max}}. \quad (4.11)$$

A la hora de definir el material, se incluyen los parámetros de amortiguamiento mediante el mencionado modelo.

Además, en el caso de las simulaciones transitorias, es necesaria la introducción de la fuerza excitadora y los nodos cuya posición fue salvada tras cada iteración. En cuanto a la fuerza excitadora, su implementación tuvo dos partes: los puntos de aplicación y los valores de la fuerza. Como puntos de aplicación se eligieron todos los nodos que caen en las posiciones que cubre el actuador correspondiente, siendo la fuerza en sentido vertical y de valor unitario en cada nodo (valor que será multiplicado por el valor de la señal en cada instante de tiempo). En cuanto a las posiciones salvadas, fueron consideradas de forma que los nodos correspondan con la posición del centro de cada uno de los sensores presentes en el experimento.

### Placa Aluminio

Se detallan ahora las partes nuevas respecto a la Sección 4.1.2 en la implementación de simulaciones transitorias con FEM para la placa Aluminio. En cuanto a los parámetros, se introdujeron el incremento de tiempo, el número de muestras, el coeficiente de amortiguamiento y las frecuencias mínima y máxima (elegidas co-

mo 50 y 1600 Hz), siendo calculados los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  a partir de los otros parámetros.

```

PARAMeter
dt = 0.000244140625      ! incremento de tiempo
nm = 4096*30             ! número de muestras
xi = 0.0027              ! coeficiente de amortiguamiento
f1 = 2*3.14159*50        ! frecuencia mínima
f2 = 2*3.14159*1600     ! frecuencia máxima
R1 = 2*xi*f1*f2/(f1+f2) ! parámetro Rayleigh 1 (alfa)
R2 = 2*xi/(f1+f2)       ! parámetro Rayleigh 2 (beta)
    
```

En la definición de materiales se introdujo la siguiente línea al final (igualmente en el resto de placas):

```
DAMPing, RAYLeigh, R1, R2
```

En cuanto a las posiciones de la fuerza excitadora, se usaron dos, correspondientes a los actuadores A1 y A2:

Actuador A1

Actuador A2

FORCe

```

11201, , 0, 0, 1
11199, , 0, 0, 1
11200, , 0, 0, 1
11202, , 0, 0, 1
11203, , 0, 0, 1
11030, , 0, 0, 1
10859, , 0, 0, 1
11372, , 0, 0, 1
11543, , 0, 0, 1
11029, , 0, 0, 1
11371, , 0, 0, 1
11031, , 0, 0, 1
11373, , 0, 0, 1
    
```

FORCe

```

4829, , 0, 0, 1
4827, , 0, 0, 1
4828, , 0, 0, 1
4830, , 0, 0, 1
4831, , 0, 0, 1
4658, , 0, 0, 1
4487, , 0, 0, 1
5000, , 0, 0, 1
5171, , 0, 0, 1
4657, , 0, 0, 1
4999, , 0, 0, 1
4659, , 0, 0, 1
5001, , 0, 0, 1
    
```

Los valores de la fuerza se introdujeron de la siguiente forma:

```

BATCh
PROP
END
2 1
ValorTiempoInicial      ValorFuerzaInicial
...
ValorTiempoFinal        ValorFuerzaFinal
    
```



Para finalizar con el postproceso, se introdujeron los nodos que deben ser salvados:

```
BATCh
TPL0
END
DISPlacement, 7403, 3 ! sensor S1
DISPlacement, 14927, 3 ! sensor S2
DISPlacement, 7475, 3 ! sensor S3
DISPlacement, 14999, 3 ! sensor S4
```

En cuanto a la parte de cálculo, se introdujeron las órdenes asociadas al cálculo temporal de la siguiente forma:

```
BATCh
DT, , dt
TRANsient CONSeRve
END
```

```
BATCh
TANG
LOOP, , nm
TIME
FORM
SOLV
NEXT
END
```

### Placa CFRP1

En esta placa se introdujeron los mismos cambios que para la placa Aluminio con excepción de los parámetros relacionados con el amortiguamiento:

```
xi = 0.0037           ! coeficiente de amortiguamiento
f1 = 2*3.14159*40     ! frecuencia mínima
f2 = 2*3.14159*1600  ! frecuencia máxima
```

### Placa CFRP2

Para esta placa los parámetros de amortiguamiento fueron:

```
xi = 0.0050           ! coeficiente de amortiguamiento
f1 = 2*3.14159*88     ! frecuencia mínima
f2 = 2*3.14159*1600  ! frecuencia máxima
```

En este caso solo se usó un actuador, de forma que la posición de los nodos en los que se introduce la frecuencia excitadora queda definida de la siguiente forma:

```
FORCe          !
34132, , 0, 0, 1 ! Fila y=0.43
...
34144, , 0, 0, 1
34320, , 0, 0, 1 ! Fila y=0.435
...
34332, , 0, 0, 1
34508, , 0, 0, 1 ! Fila y=0.44
...
34520, , 0, 0, 1
34696, , 0, 0, 1 ! Fila y=0.445
...
34708, , 0, 0, 1
34884, , 0, 0, 1 ! Fila y=0.45
...
34896, , 0, 0, 1
35072, , 0, 0, 1 ! Fila y=0.455
...
35084, , 0, 0, 1
35260, , 0, 0, 1 ! Fila y=0.46
...
35272, , 0, 0, 1
35448, , 0, 0, 1 ! Fila y=0.465
...
35460, , 0, 0, 1
```

Finalmente, los nodos que deben ser salvados fueron en este caso:

```
BATCh
TPL0
END
DISPlacement, 5781, 3 ! sensor S1
DISPlacement, 12081, 3 ! sensor S2
DISPlacement, 28018, 3 ! sensor S3
DISPlacement, 41367, 3 ! sensor S4
```

### 4.2.3 Excitación mediante señales tipo ruido blanco

Con objeto de conocer la respuesta vibracional de la placa, se usó una señal excitadora tipo ruido blanco con un ancho de banda comprendido entre 0 y 1600 Hz, tanto en los ensayos experimentales como en las simulaciones FEM. En los ensayos experimentales la señal fue generada de forma aleatoria por el equipo PULSE®,

de forma que es diferente para cada ensayo. En las simulaciones FEM, sin embargo, solo hay dos tipos de ruidos previamente generados. En la Figura 4.13 se puede observar un ejemplo de este tipo de señal excitadora en tiempo y frecuencia (usando para ello la Densidad Espectral de Potencia). Se observa que es prácticamente plana en el rango 0-1600 Hz.

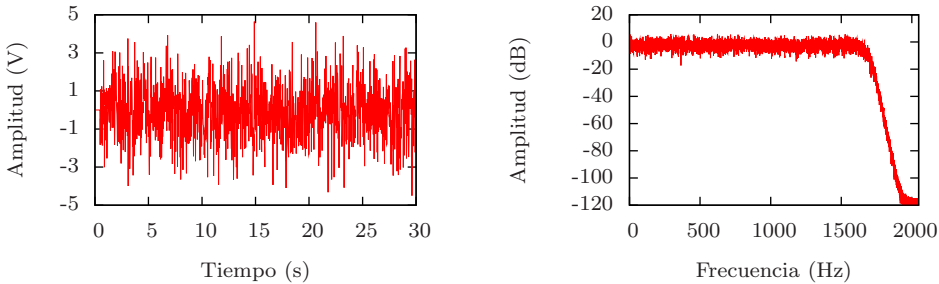


Figura 4.13: Ejemplo de señal excitadora tipo ruido blanco en tiempo (izquierda) y frecuencia (derecha).

A continuación se muestran los resultados para las distintas placas.

### Placa Aluminio

En la Figura 4.14 se puede observar una ampliación de la respuesta temporal, tanto experimental como de simulación, de la placa Aluminio en los cuatro sensores, ante una excitación tipo ruido blanco usando el actuador A1. En ambas partes observamos la similitud de las señales en todos los sensores (evidente en el caso de la simulación), al ser la posición de los sensores simétrica respecto a dicho actuador. En el caso de la simulación la gráfica parece indicarnos que la placa no es capaz de responder a los cambios vibracionales con tanta rapidez como lo hace la placa real (esta conclusión es similar en todas las ventanas temporales que se han probado).

En la Figura 4.15 podemos observar la Respuesta en Frecuencia, tanto experimental como de simulación, de la placa Aluminio en los cuatro sensores, ante una excitación tipo ruido blanco usando los actuadores A1 y A2. De nuevo se observa una similitud en las señales (evidente en el caso de la simulación y el actuador A1). Para ambos actuadores, comparando experimento y simulación queda claro que el amortiguamiento está sobreestimado, ya que si bien los modos de altas frecuencias

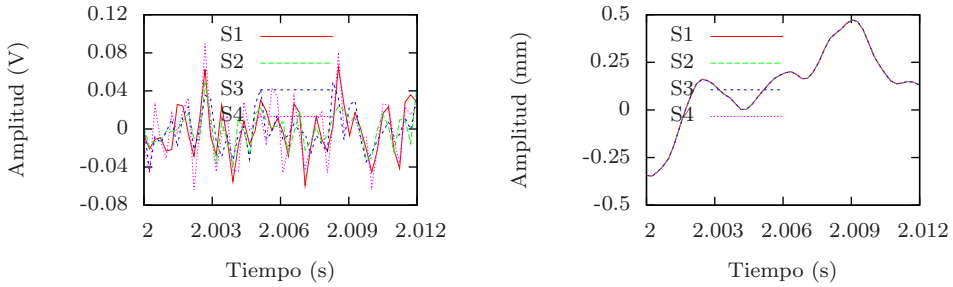


Figura 4.14: Detalle de la respuesta temporal, experimental (izquierda) y de simulación (derecha), de la placa Aluminio en los cuatro sensores, ante una excitación tipo ruido blanco usando el actuador A1.

aparecen claramente en la simulación, lo hacen mucho más amortiguados que en el experimento.

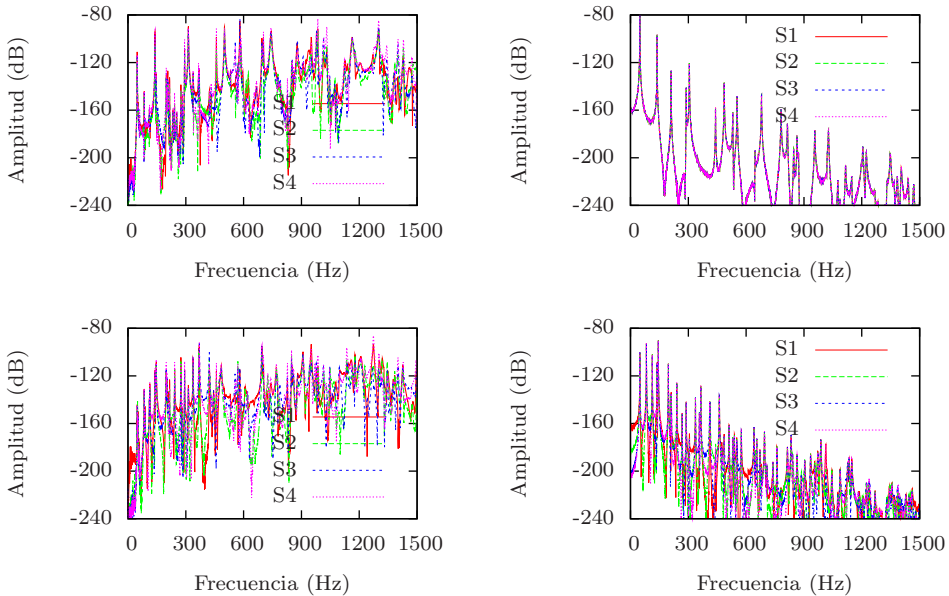


Figura 4.15: Respuesta en Frecuencia, experimental (izquierda) y de simulación (derecha), de la placa Aluminio en los cuatro sensores, ante una excitación tipo ruido blanco, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo).

Usando el actuador A1 en el experimento podemos ver que hay picos con una mayor amplitud que otros (los llamados modos activos), mientras que en simulación los modos que no son activos no llegan siquiera a aparecer. En el caso del actuador A2, no centrado en la placa, los picos son más uniformes en amplitud en el experimento, y aparecen muchas más frecuencias en la simulación.

La Figura 4.16 muestra la Respuesta en Frecuencia, tanto experimental como de simulación, de la placa Aluminio en el sensor S1 (elegido como ejemplo), durante dos ensayos diferentes, ante una excitación tipo ruido blanco usando los actuadores A1 y A2. En los cuatro casos se puede comprobar que la correspondencia es casi perfecta. Este hecho será la base de la detección de defectos usando la Respuesta en Frecuencia de señales temporales: si dos ensayos diferentes presentan una Respuesta en Frecuencia muy parecida, podremos detectar la presencia de daño cuando los cambios en la respuesta sean considerablemente mayores que las diferencias entre varios ensayos sobre la placa sin daño.

Por último, la Figura 4.17 muestra la superposición de las respuestas en frecuencia, experimental y de simulación, de la placa Aluminio en el sensor S1 (elegido como ejemplo), ante una excitación tipo ruido blanco usando los actuadores A1 y A2. Para una mejor visualización se ha elegido un rango de frecuencias más pequeño (0-500 Hz). Además de los hechos anteriormente comentados sobre que los modos altos están sobreamortiguados en la simulación, y de que usando el actuador A1 los picos de los modos no activos no llegan a aparecer, se observa un corrimiento a la izquierda de los picos en simulación respecto del experimento, e incluso respecto de los valores de las frecuencias calculados mediante simulación FEM de análisis modal (representados mediante líneas verticales). No se ha podido averiguar el motivo de este resultado.

### **Placa CFRP1**

Los resultados para la placa CFRP1 se pueden observar en las Figuras 4.18, 4.19, 4.20 y 4.21. Las conclusiones de cada gráfica son similares a las de la gráfica equivalente de la placa Aluminio.

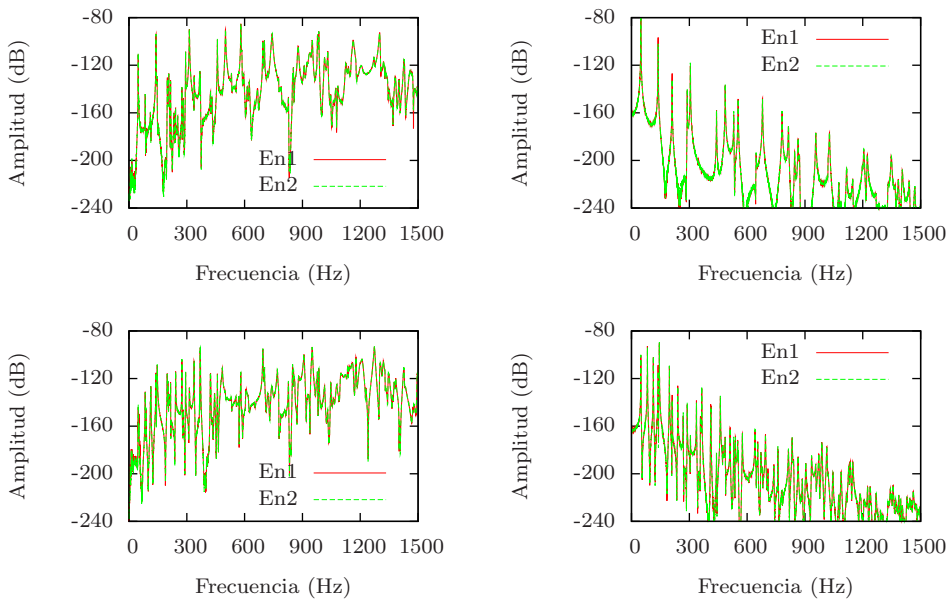


Figura 4.16: Respuesta en Frecuencia, experimental (izquierda) y de simulación (derecha), de la placa Aluminio en el sensor S1, ante una excitación tipo ruido blanco, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo), durante dos ensayos diferentes.

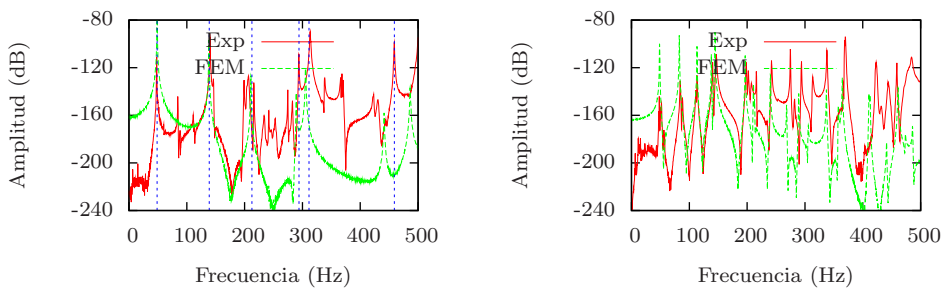


Figura 4.17: Respuesta en Frecuencia, experimental y de simulación, de la placa Aluminio en el sensor S1, ante una excitación tipo ruido blanco, usando los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha). Con líneas verticales se representan las frecuencias de los modos activos para el actuador A1.

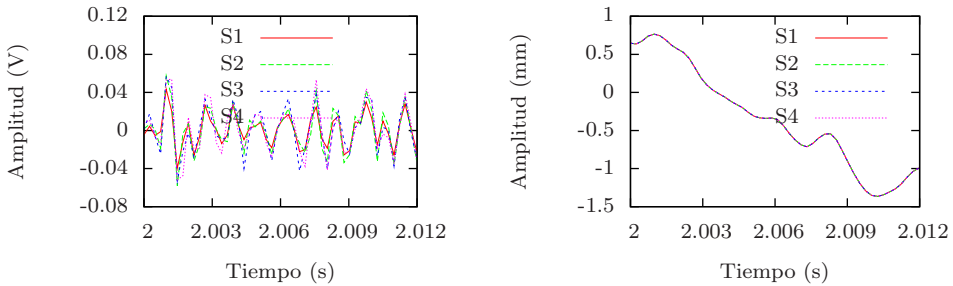


Figura 4.18: Detalle de la respuesta temporal, experimental (izquierda) y de simulación (derecha), de la placa CFRP1 en los cuatro sensores, ante una excitación tipo ruido blanco usando el actuador A1.

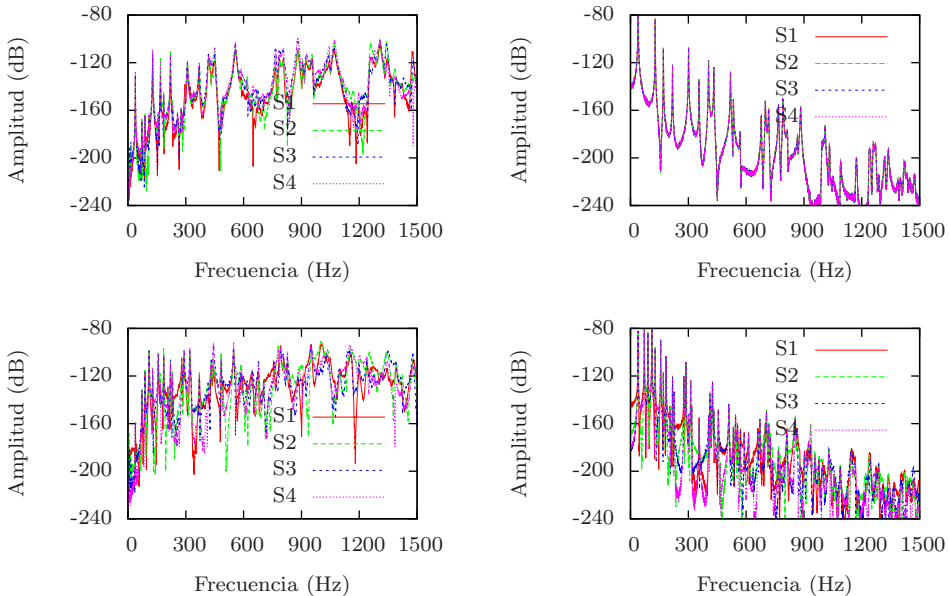


Figura 4.19: Respuesta en Frecuencia, experimental (izquierda) y de simulación (derecha), de la placa CFRP1 en los cuatro sensores, ante una excitación tipo ruido blanco, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo).

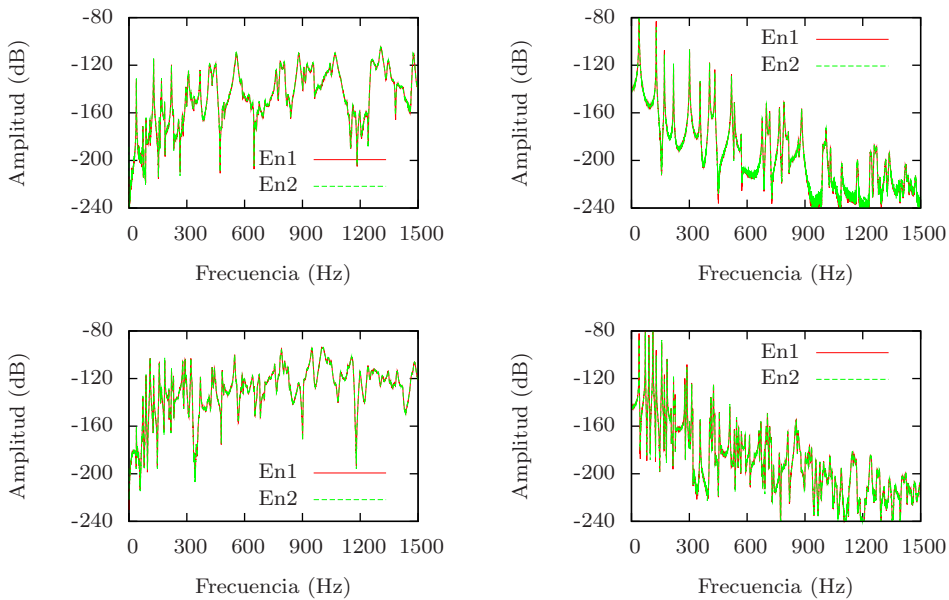


Figura 4.20: Respuesta en Frecuencia, experimental (izquierda) y de simulación (derecha), de la placa CFRP1 en el sensor S1, ante una excitación tipo ruido blanco, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo), durante dos ensayos diferentes.

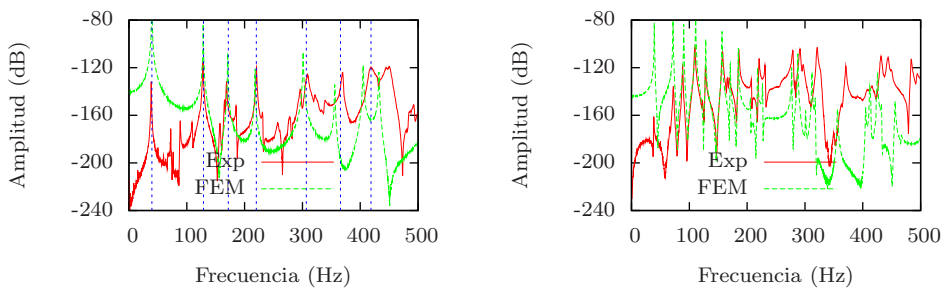


Figura 4.21: Respuesta en Frecuencia, experimental y de simulación, de la placa CFRP1 en el sensor S1, ante una excitación tipo ruido blanco, usando los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha). Con líneas verticales se representan las frecuencias de los modos activos para el actuador A1.



### Placa CFRP2

En la Figura 4.22 se puede observar una ampliación de la respuesta temporal, tanto experimental como de simulación, de la placa CFRP2 en los cuatro sensores, ante una excitación tipo ruido blanco usando el actuador A1. En ambas partes observamos una menor similitud de las señales en los sensores respecto a lo observado en las dos placas anteriores, incluso en simulación, debido a la ausencia de simetría en la placa. Las señales en los sensores S1-S2 por un lado y S3-S4 por otro se parecen entre sí, como es lógico ya que cada pareja está colocada en la misma zona de la placa en posiciones casi simétricas respecto a la línea  $x = b/2$ .

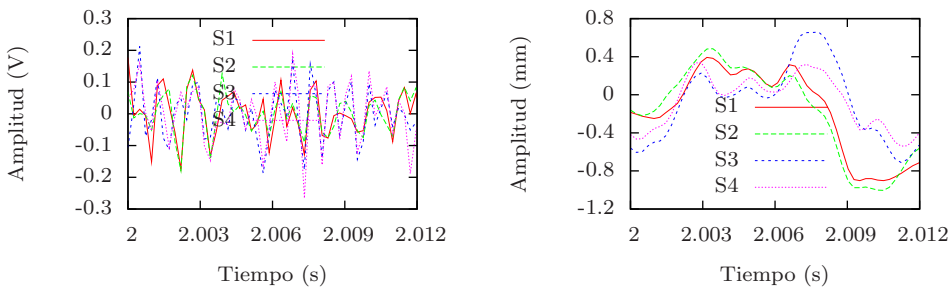


Figura 4.22: Detalle de la respuesta temporal, experimental (izquierda) y de simulación (derecha), de la placa CFRP2 en los cuatro sensores, ante una excitación tipo ruido blanco usando el actuador A1.

En la Figura 4.23 se puede observar la Respuesta en Frecuencia, tanto experimental como de simulación, de la placa CFRP2 en los cuatro sensores, ante una excitación tipo ruido blanco usando el actuador A1, en los rangos 0-500 Hz y 0-1500 Hz. La similitud en este caso es mayor que en las señales temporales de la misma placa, pero las diferencias son considerablemente mayores que para las placas estudiadas con anterioridad. De nuevo se observa una mayor similitud entre las señales en los sensores S1-S2 por un lado y S3-S4 por otro.

La Figura 4.24 muestra la Respuesta en Frecuencia, tanto experimental como de simulación, de la placa CFRP2 en el sensor S1 (elegido como ejemplo), durante dos ensayos diferentes, ante una excitación tipo ruido blanco usando el actuador A1. En los dos casos se puede comprobar que la correspondencia es casi perfecta.

Por último, la Figura 4.25 muestra la superposición de la Respuesta en Frecuen-

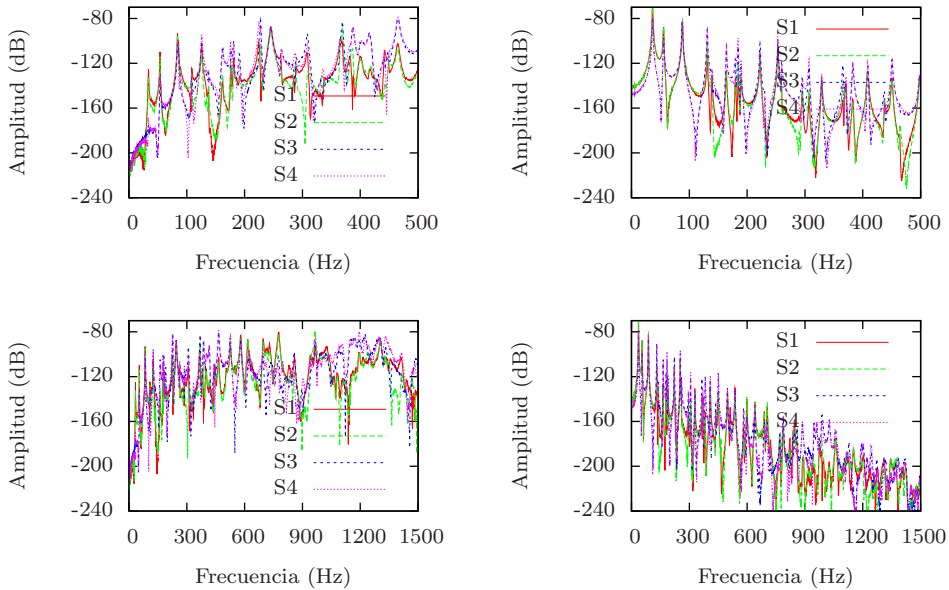


Figura 4.23: Respuesta en Frecuencia, experimental (izquierda) y de simulación (derecha), de la placa CFRP2 en los cuatro sensores, ante una excitación tipo ruido blanco usando el actuador A1, en los rangos 0-500 Hz (arriba) y 0-1500 Hz (abajo).

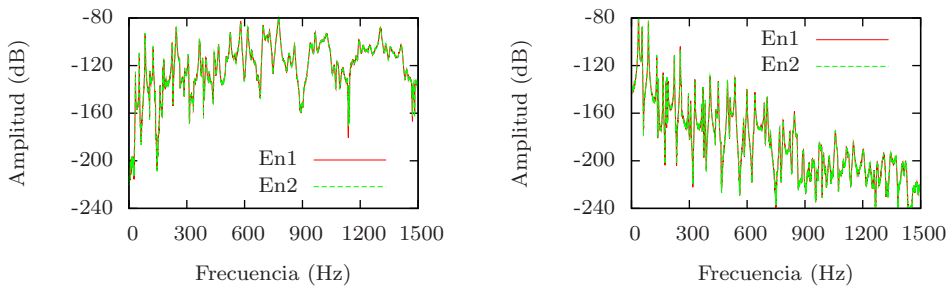


Figura 4.24: Respuesta en Frecuencia, experimental (izquierda) y de simulación (derecha), de la placa CFRP2 en el sensor S1, ante una excitación tipo ruido blanco usando el actuador A1, durante dos ensayos diferentes.

cia, experimental y de simulación, de la placa CFRP2 en el sensor S1 (elegido como ejemplo), ante una excitación tipo ruido blanco usando el actuador A1. Para una mejor visualización se ha elegido un rango de frecuencias más pequeño (0-250 Hz). De nuevo se observa el sobreamortiguamiento en la simulación, así como un corrimiento a la izquierda de los picos en simulación (visible en los picos de frecuencia más alta) respecto de los valores de las frecuencias calculados mediante simulación FEM de análisis modal (representados mediante líneas verticales).

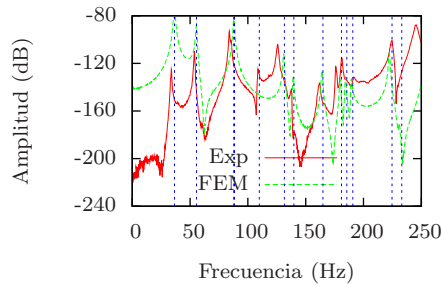


Figura 4.25: Respuesta en Frecuencia, experimental y de simulación, de la placa CFRP2 en el sensor S1, ante una excitación tipo ruido blanco usando el actuador A1. Con líneas azules verticales se indican las frecuencias principales obtenidas con simulación modal mediante FEM.

#### 4.2.4 Excitación mediante señales senoidales

El otro tipo de señales excitadoras usadas tanto en ensayos experimentales como en simulación transitoria FEM para las placas Aluminio y CFRP1 fueron señales de tipo senoidal. En ambos casos se usaron tres frecuencias diferentes:

- Una frecuencia próxima a una resonancia.
- Una frecuencia en una zona de baja respuesta de la placa.
- Una frecuencia intermedia entre dos resonancias.

En los ensayos experimentales la señal fue generada por el equipo PULSE®<sup>®</sup>, de forma que el momento en el que comienza la excitación es diferente para cada ensayo. Por contra, en las simulaciones FEM solo se ha llevado a cabo una simulación

para cada frecuencia excitadora y actuador. En la Figura 4.26 se puede observar un ejemplo de este tipo de señales con una frecuencia excitadora de 135 Hz usada en un experimento, tanto en tiempo como en frecuencia.

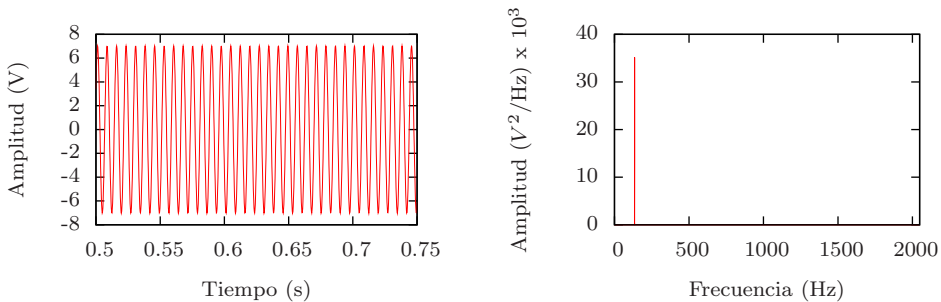


Figura 4.26: Ejemplo de señal excitadora tipo senoidal con frecuencia 135 Hz en tiempo (izquierda) y frecuencia (derecha).

Como ejemplo de las señales obtenidas en este tipo de ensayos, en las Figuras 4.27 y 4.28 podemos ver la respuesta temporal experimental y de simulación de ambas placas en el sensor S1, ante una excitación senoidal de frecuencia 135 Hz. En todas ellas se observa una parte transitoria (los primeros segundos) seguida de una parte estacionaria (que se prolonga más allá de lo que se ve en la gráfica, hasta los 30 segundos que dura la medida). Se puede observar que la parte transitoria se amortigua antes en la placa CFRP1 que en la placa Aluminio, debido a su mayor coeficiente de amortiguamiento. En las medidas experimentales de ambas placas se observa además que la excitación no comienza necesariamente al principio de la señal, ya que el equipo PULSE® no sincroniza perfectamente la grabación de datos con la duración de la excitación.

### Frecuencia excitadora próxima a una resonancia

La frecuencia excitadora próxima a una resonancia fue de 135 Hz para ambas placas. Esta frecuencia está cerca de la cuarta frecuencia principal de la placa Aluminio (140.75 Hz) y a la quinta de la placa CFRP1 (129.25 Hz). Ambas frecuencias corresponden a modos activos para el actuador centrado.

En las Figuras 4.29 y 4.30 se puede observar una ampliación de la respuesta temporal, tanto experimental como de simulación, de ambas placas en los cuatro

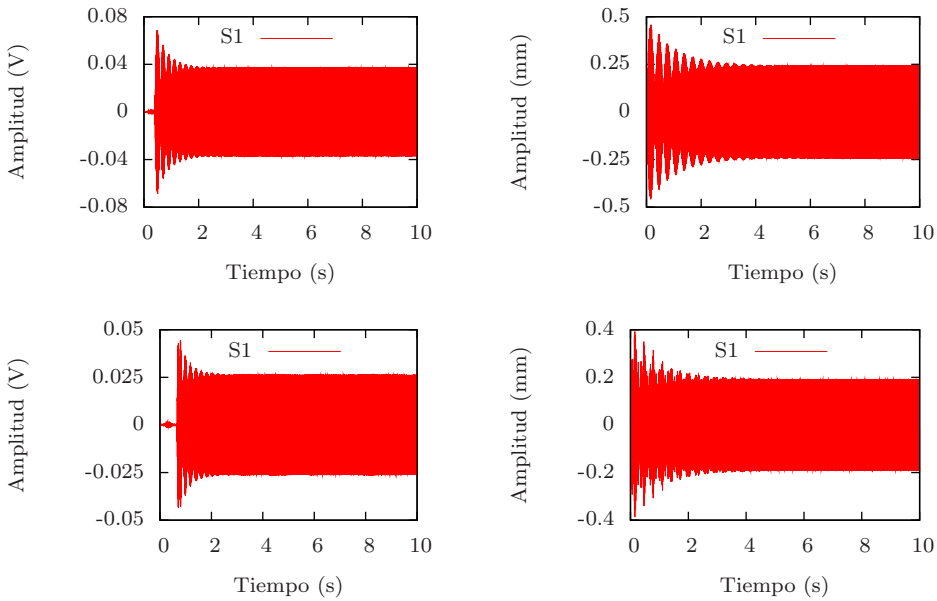


Figura 4.27: Respuesta temporal, experimental (izquierda) y de simulación (derecha), de la placa Aluminio en el sensor S1, ante una excitación senoidal de frecuencia 135 Hz, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo).

sensores, ante una excitación senoidal de frecuencia 135 Hz usando el actuador centrado A1. La ventana de tiempo elegida corresponde a la **parte transitoria**. Se puede ver que las señales experimentales de los cuatro sensores están aproximadamente en fase y miden una señal parecida (con pequeñas diferencias en cuanto a la amplitud máxima de la señal), mientras en simulación las cuatro señales son idénticas. Esto es debido a la simetría de la configuración placa-sensores-actuador. Las pequeñas diferencias en fase pueden deberse a pequeños fallos de colocación del sensor. Por otra parte, las diferencias en amplitud pueden deberse a la diferencia de acoplamiento de cada sensor, a la distinta longitud de los cables (lo que implica una mayor o menor ganancia) o a la propia ganancia del PZT. Si se comparan las señales experimentales con las de simulación, se observa que el parecido entre ellas es razonable.

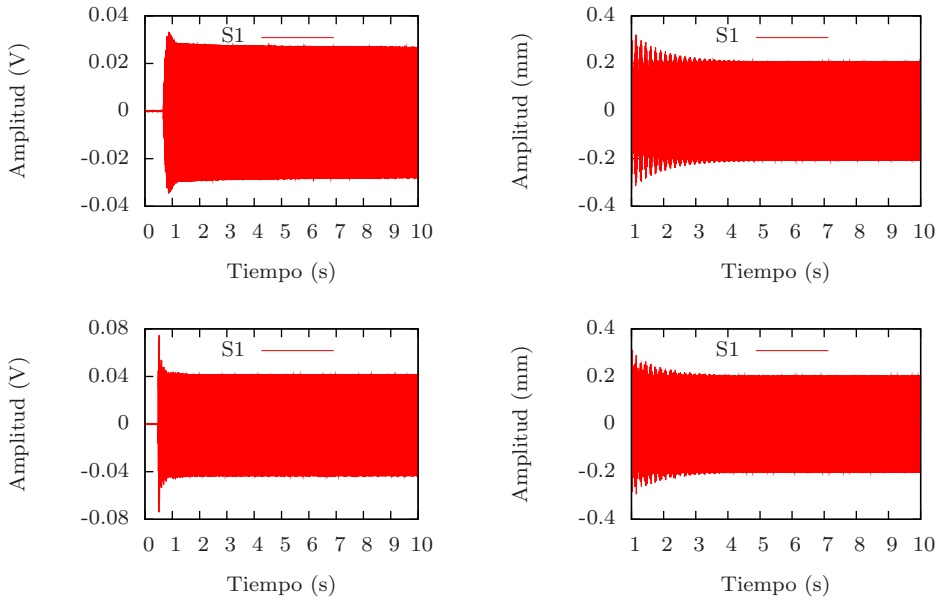


Figura 4.28: Respuesta temporal, experimental (izquierda) y de simulación (derecha), de la placa CFRP1 en el sensor S1, ante una excitación senoidal de frecuencia 135 Hz, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo).

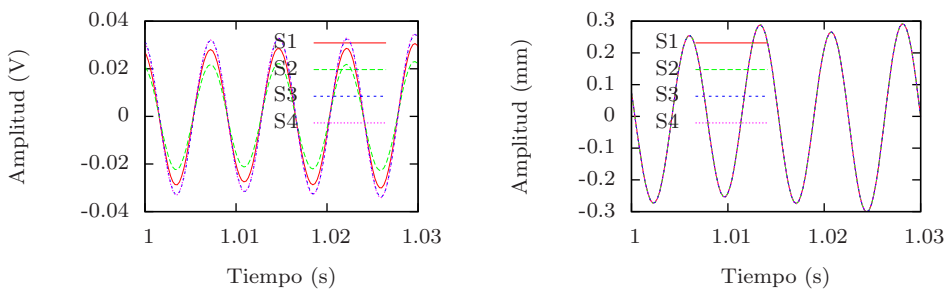


Figura 4.29: Detalle de la respuesta temporal (parte transitoria), experimental (izquierda) y de simulación (derecha), de la placa Aluminio en los cuatro sensores, ante una excitación senoidal de frecuencia 135 Hz usando el actuador A1.

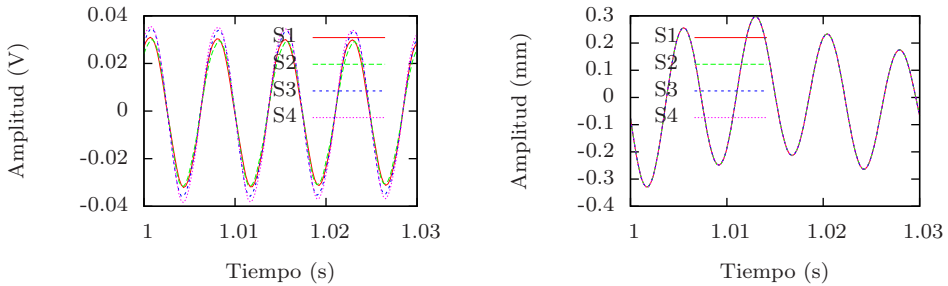


Figura 4.30: Detalle de la respuesta temporal (parte transitoria), experimental (izquierda) y de simulación (derecha), de la placa CFRP1 en los cuatro sensores, ante una excitación senoidal de frecuencia 135 Hz usando el actuador A1.

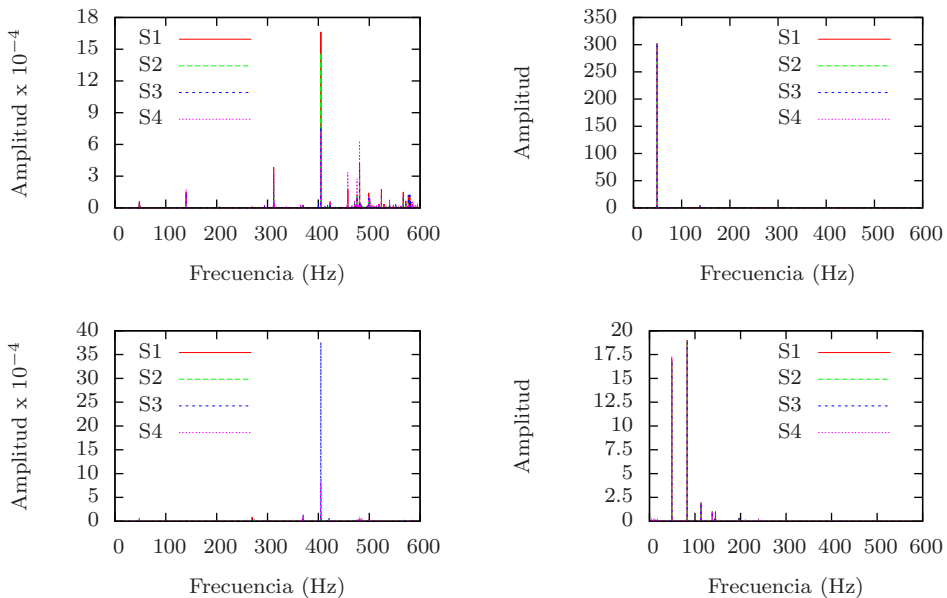


Figura 4.31: Respuesta en Frecuencia, experimental (izquierda) y de simulación (derecha), de la placa Aluminio en los cuatro sensores, ante una excitación senoidal de frecuencia 135 Hz, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo).

Las Figuras 4.31 y 4.32 muestran la Respuesta en Frecuencia, tanto experimental como de simulación, de ambas placas en los cuatro sensores, ante una excitación senoidal de frecuencia 135 Hz usando los actuadores A1 y A2. Es de reseñar la presencia en la señal experimental de picos con valores considerablemente grandes en 270, 405 y 540 Hz, más aun si consideramos que los dos primeros están bastante lejanos a las frecuencias principales de la placa. Estos valores son múltiplos de la frecuencia excitadora, lo que hace pensar que, al usar una señal excitadora de tipo senoidal con una frecuencia determinada, se pueden estar generando diferentes armónicos de dicha frecuencia. Esto será analizado con profundidad más adelante.

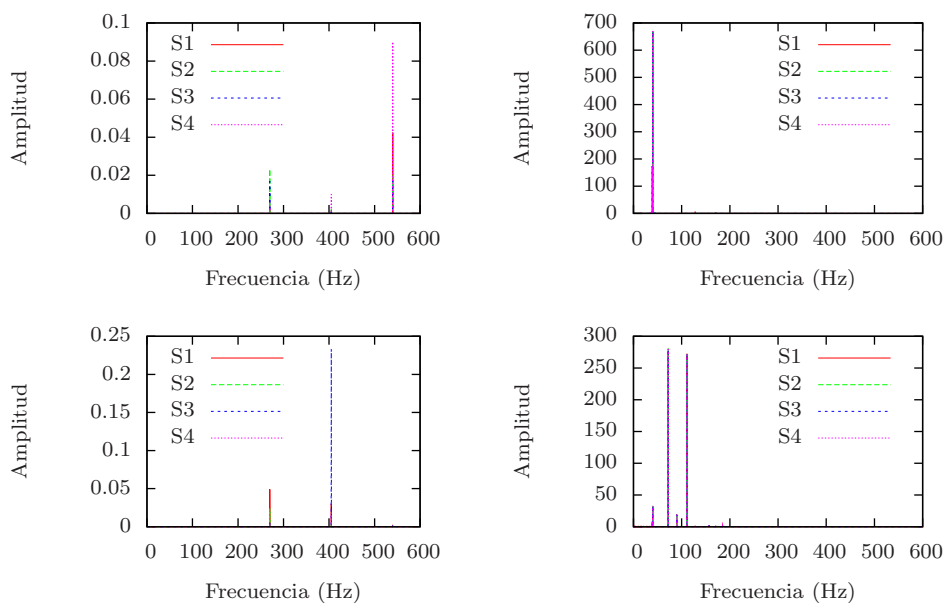


Figura 4.32: Respuesta en Frecuencia, experimental (izquierda) y de simulación (derecha), de la placa CFRP1 en los cuatro sensores, ante una excitación senoidal de frecuencia 135 Hz, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo).

Por otra parte, la simulación numérica no presenta picos a esas frecuencias, estando dominada por las primeras frecuencias principales de cada placa. También se puede ver como en la simulación se excita de manera importante el primer modo cuando se usa el actuador A1, y los modos próximos a la frecuencia excitadora cuando se usa el actuador A2.



Las Figuras 4.33 y 4.34 muestran la Respuesta en Frecuencia de ambas placas en el sensor S1, durante dos ensayos experimentales diferentes, ante una excitación senoidal de frecuencia 135 Hz usando los actuadores A1 y A2. A diferencia del apartado anterior, en este caso las diferencias son notables. El hecho de que la Respuesta en Frecuencia sea diferente en cada ensayo, aun en placa sin daño, hace difícil usar las técnicas para detectar daño explicadas más adelante en el Capítulo 5, basadas en los cambios globales de la Respuesta en Frecuencia.

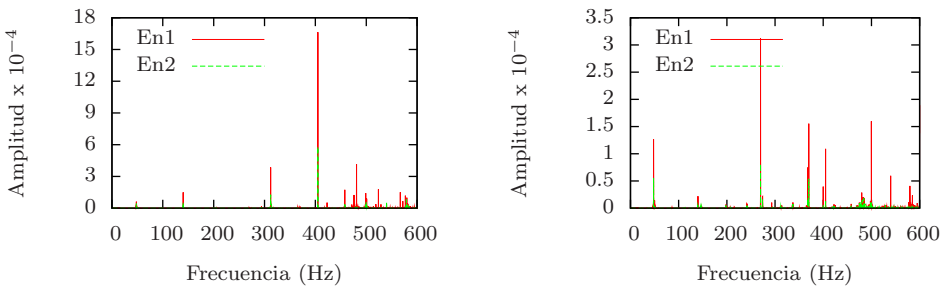


Figura 4.33: Respuesta en Frecuencia de la placa Aluminio en el sensor S1, ante una excitación senoidal de frecuencia 135 Hz, usando los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha), durante dos ensayos experimentales diferentes.

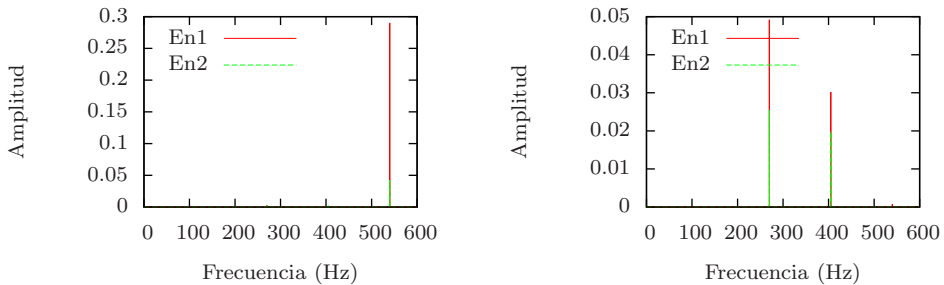


Figura 4.34: Respuesta en Frecuencia de la placa CFRP1 en el sensor S1, ante una excitación senoidal de frecuencia 135 Hz, usando los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha), durante dos ensayos experimentales diferentes.

Por último, en las Figuras 4.35 y 4.36 se observan dos ejemplos de respuesta temporal experimental y de simulación de ambas placas en el sensor S1, ante una

excitación senoidal de frecuencia 135 Hz usando los actuadores A1 y A2. Las señales están normalizadas cada una a su desviación estándar y trasladadas temporalmente para que coincidan sus valores máximos. Como referencia, en la gráfica también se puede observar una señal senoidal similar a la excitadora. La ventana temporal elegida corresponde a la **parte estacionaria**. Se observa a simple vista que la similitud entre las tres señales es muy alta.

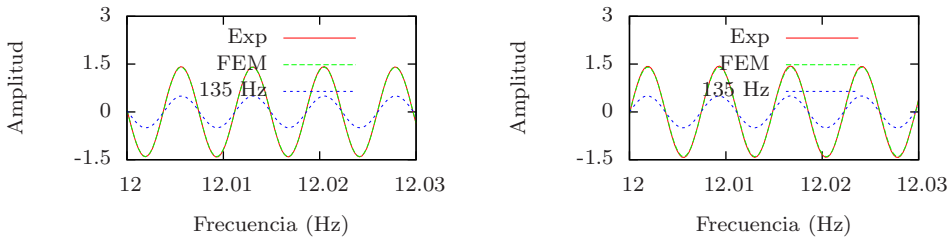


Figura 4.35: Detalle de la respuesta temporal (parte estacionaria), experimental y de simulación, de la placa Aluminio en el sensor S1, ante una excitación senoidal de frecuencia 135 Hz, usando los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha), junto a una señal senoidal similar a la excitadora.

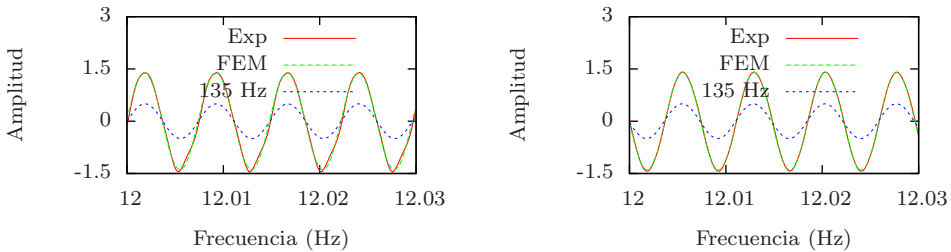


Figura 4.36: Detalle de la respuesta temporal (parte estacionaria), experimental y de simulación, de la placa CFRP1 en el sensor S1, ante una excitación senoidal de frecuencia 135 Hz, usando los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha), junto a una señal senoidal similar a la excitadora.

### Frecuencia excitadora en una zona de baja respuesta

La frecuencia excitadora en una zona de baja respuesta fue de 170 Hz en el caso de la placa Aluminio y de 155 Hz en el caso de la placa CFRP1. En las Figuras 4.7 y 4.8 se puede observar que para esos valores la respuesta vibracional de la placa es muy baja, a pesar de que la placa CFRP1 presente una frecuencia principal cercana (158.25 Hz).

En las Figuras 4.37 y 4.38 se puede observar una ampliación de la respuesta temporal, tanto experimental como de simulación, de las placas Aluminio y CFRP1 en los cuatro sensores, ante una excitación senoidal de 170 y 155 Hz respectivamente, usando el actuador centrado A1. La ventana de tiempo elegida corresponde a la **parte transitoria**.

Para la placa Aluminio, los valores de amplitud son un orden de magnitud inferiores respecto a los obtenidos cuando la frecuencia excitadora era cercana a una resonancia. En cuanto a las señales experimentales, solo la correspondiente al sensor S3 parece tener un comportamiento aproximadamente senoidal, siendo su valor bastante mayor que el de las otras tres señales. Las señales correspondientes a los otros tres sensores, al tener un nivel de señal tan bajo, se ven muy influidas por el ruido, de ahí que su comportamiento no sea senoidal. Las señales de simulación vuelven a proporcionarnos valores idénticos entre ellas, aunque sin embargo, la frecuencia a la que está vibrando la placa durante la parte transitoria es inferior a la excitadora. Esto se verá con mayor claridad más adelante.

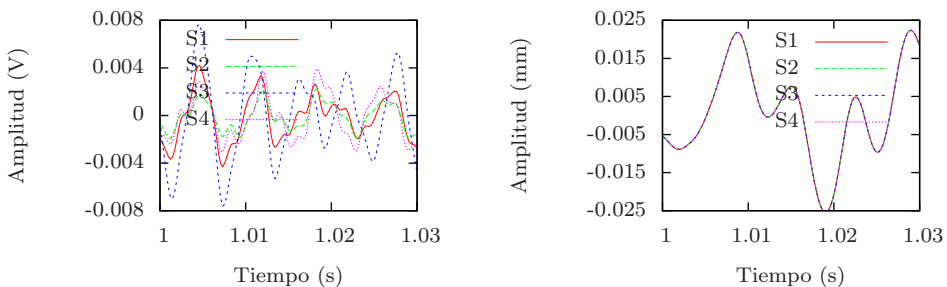


Figura 4.37: Detalle de la respuesta temporal (parte transitoria), experimental (izquierda) y de simulación (derecha), de la placa Aluminio en los cuatro sensores, ante una excitación senoidal de frecuencia 170 Hz usando el actuador A1.

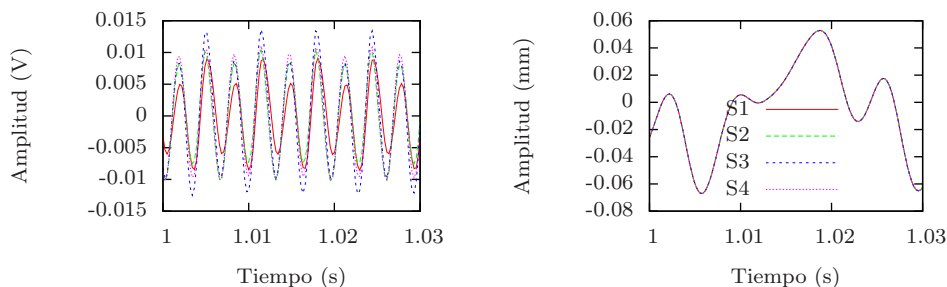


Figura 4.38: Detalle de la respuesta temporal (parte transitoria), experimental (izquierda) y de simulación (derecha), de la placa CFRP1 en los cuatro sensores, ante una excitación senoidal de frecuencia 155 Hz usando el actuador A1.

Para la placa CFRP1, los valores de amplitud experimentales son aproximadamente la mitad que con la anterior excitación. En este caso los cuatro sensores sí proporcionan señales senoidales y parecidas entre sí, con diferencias en fase y amplitud, por las razones anteriormente comentadas. En este caso, sin embargo, la frecuencia es mayor que la excitadora, como se verá más adelante. En simulación los valores de la amplitud son un orden de magnitud inferiores, y la frecuencia vuelve a ser inferior a la excitadora.

Las Figuras 4.39 y 4.40 muestran la Respuesta en Frecuencia entre 0 y 600 Hz, tanto experimental como de simulación, de las dos placas en los cuatro sensores, ante estas excitaciones, usando los actuadores A1 y A2. Es de reseñar que, en la señal experimental, aparecen picos considerablemente grandes en los valores 340 y 510 Hz (para la placa Aluminio) y 310 y 465 Hz (para la placa CFRP1), siendo de nuevo estos valores múltiplos de la correspondiente frecuencia excitadora. De nuevo, observamos que en simulación los valores de los picos corresponden a los valores de las primeras frecuencias de la placa.

Las Figuras 4.41 y 4.42 muestran la Respuesta en Frecuencia de ambas placas en el sensor S1 (elegido como ejemplo), ante estas excitaciones usando los actuadores A1 y A2, durante dos ensayos experimentales diferentes. De nuevo las considerables diferencias en amplitud impedirían usar estas funciones de Respuesta en Frecuencia para detectar daño mediante las técnicas empleadas en este trabajo.

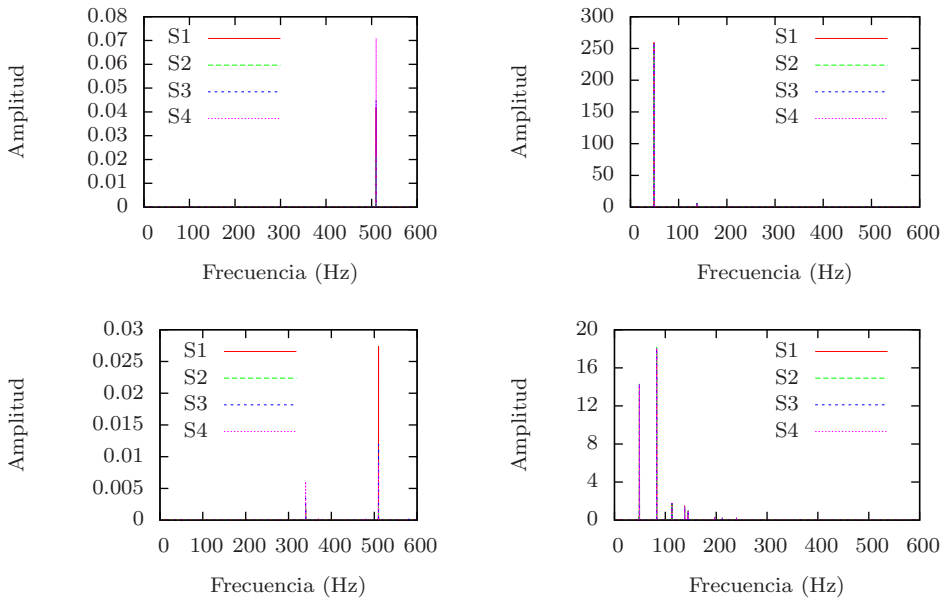


Figura 4.39: Respuesta en Frecuencia, experimental (izquierda) y de simulación (derecha), de la placa Aluminio en los cuatro sensores, ante una excitación senoidal de frecuencia 170 Hz, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo).

Por último, en las Figuras 4.43 y 4.44 se observan dos ejemplos de respuesta temporal, experimental y de simulación, de las dos placas en el sensor S3 (elegido como ejemplo), ante estas excitaciones usando los actuadores A1 y A2. Las señales están normalizadas cada una a su desviación estándar y trasladadas temporalmente para que coincidan sus valores máximos. Como referencia, en la gráfica también se puede observar una señal senoidal similar a la excitadora. La ventana temporal corresponde a la **parte estacionaria**.

Para ambas placas, usando el actuador A2 se puede observar que la correspondencia entre las tres señales es muy buena tanto en los ensayos experimentales como en simulación. Con el actuador A1 se observan resultados interesantes:

- En primer lugar, comparando las señales de simulación de las Figuras 4.43 y 4.44 (parte estacionaria) con las de las Figuras 4.37 y 4.38 (parte transitoria), se observa que la frecuencia a la que vibra la placa es diferente. Esto es debido a que, por la baja respuesta de la placa a la frecuencia excitadora, durante

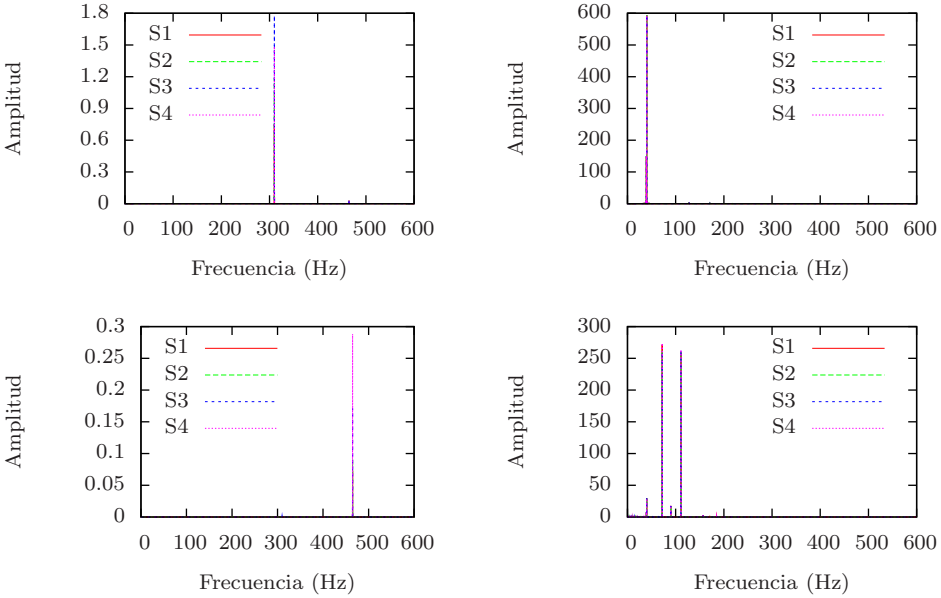


Figura 4.40: Respuesta en Frecuencia, experimental (izquierda) y de simulación (derecha), de la placa CFRP1 en los cuatro sensores, ante una excitación senoidal de frecuencia 155 Hz, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo).

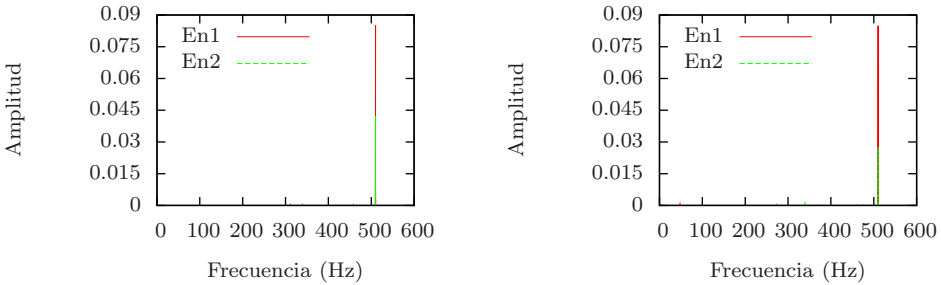


Figura 4.41: Respuesta en Frecuencia de la placa Aluminio en el sensor S1, ante una excitación senoidal de frecuencia 170 Hz, usando los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha), durante dos ensayos experimentales diferentes.

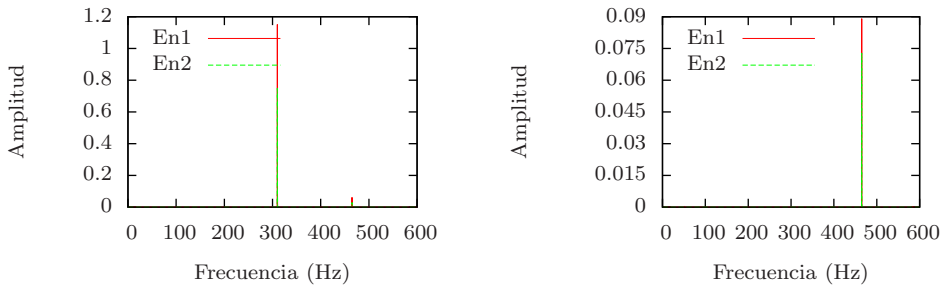


Figura 4.42: Respuesta en Frecuencia de la placa CFRP1 en el sensor S1, ante una excitación senoidal de frecuencia 155 Hz, usando los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha), durante dos ensayos experimentales diferentes.

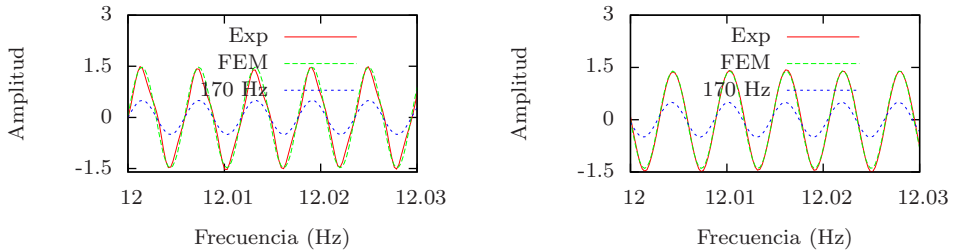


Figura 4.43: Detalle de la respuesta temporal (parte estacionaria), experimental y de simulación, de la placa Aluminio en el sensor S3, ante una excitación senoidal de frecuencia 170 Hz, usando los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha), junto a una señal senoidal similar a la excitadora.

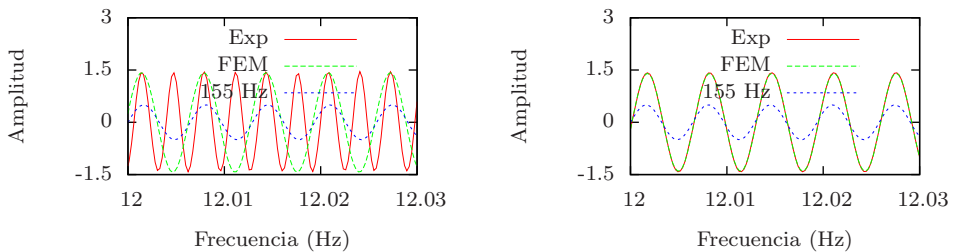


Figura 4.44: Detalle de la respuesta temporal (parte estacionaria), experimental y de simulación, de la placa CFRP1 en el sensor S3, ante una excitación senoidal de frecuencia 155 Hz, usando los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha), junto a una señal senoidal similar a la excitadora.

el transitorio, la placa vibra como una superposición de diferentes modos. No así en el estacionario, donde la placa vibra exclusivamente a la frecuencia excitadora.

- En segundo lugar, la señal experimental de la placa CFRP1 usando el actuador A1 nos indica que la placa vibra aproximadamente a 310 Hz, el doble de la frecuencia excitadora, al igual que lo hacía en la parte transitoria (Figura 4.38). Este hecho puede explicarse si se considera que la placa CFRP1 tiene una frecuencia principal en 307 Hz (modo 15), que además es un modo activo para dicho actuador. Este resultado reforzaría la hipótesis de que durante los ensayos experimentales los armónicos de la frecuencia de la señal excitadora original eran introducidos involuntariamente en la excitación. Este resultado se repite en todos sensores y en todos los ensayos realizados.

### Frecuencia excitadora intermedia entre dos resonancias

La frecuencia excitadora en una zona intermedia entre dos resonancias fue de 305 Hz en el caso de la placa Aluminio y de 435 Hz en el caso de la placa CFRP1.

En las Figuras 4.45 y 4.46 se puede observar una ampliación de la respuesta temporal, tanto experimental como de simulación, de ambas placas en los cuatro sensores, ante estas excitaciones, usando el actuador centrado A1. La ventana de tiempo elegida corresponde a la **parte transitoria**.

Para la placa Aluminio podemos ver que las señales experimentales correspondientes a los cuatro sensores están en fase y proporcionan resultados similares salvo en la amplitud de la oscilación, al igual que en casos anteriores. Para la placa CFRP1 obtenemos el mismo resultado, pero en este caso se observa que la señal no es senoidal pura.

Las Figuras 4.47 y 4.48 muestran la Respuesta en Frecuencia entre 0 y 1500 Hz, tanto experimental como de simulación, de las dos placas en los cuatro sensores ante estas excitaciones, usando los actuadores A1 y A2. De nuevo aparecen en las señales experimentales picos considerablemente grandes en valores múltiplos de la frecuencia excitadora: 610 y 915 Hz para la placa Aluminio y 807 y 1305 Hz para la placa CFRP1, no existiendo estos picos en las señales de simulación, que una vez más están dominadas por las primeras frecuencias principales de cada placa.

Las Figuras 4.49 y 4.50 muestran la Respuesta en Frecuencia de las dos placas en



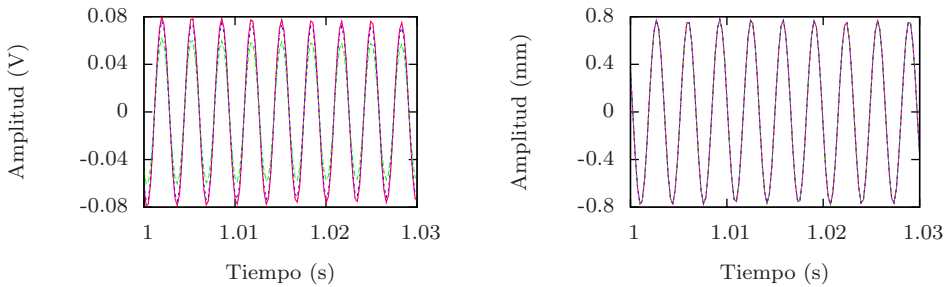


Figura 4.45: Detalle de la respuesta temporal (parte transitoria), experimental (izquierda) y de simulación (derecha), de la placa Aluminio en los cuatro sensores, ante una excitación senoidal de frecuencia 305 Hz usando el actuador A1.

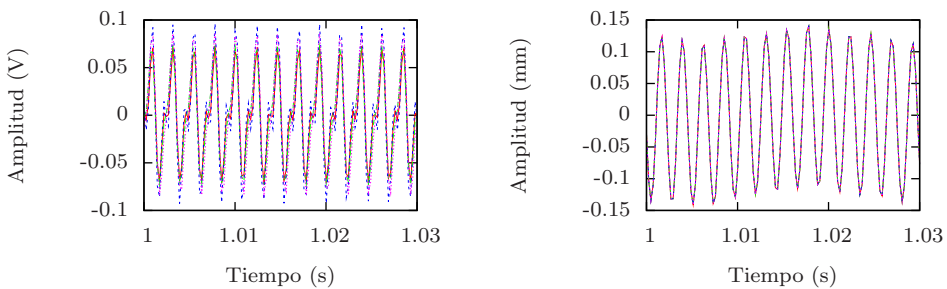


Figura 4.46: Detalle de la respuesta temporal (parte transitoria), experimental (izquierda) y de simulación (derecha), de la placa CFRP1 en los cuatro sensores ante una excitación senoidal de frecuencia 435 Hz usando el actuador A1.

el sensor S1 (elegido como ejemplo), durante dos ensayos experimentales diferentes, ante estas excitaciones, usando los actuadores A1 y A2. De nuevo las considerables diferencias impedirían usar estas funciones de Respuesta en Frecuencia para detectar daño mediante las técnicas empleadas en este trabajo.

Por último, en las Figuras 4.51 y 4.52 se observan dos ejemplos de respuesta temporal, experimental y de simulación, de las dos placas en el sensor S1, ante estas excitaciones, usando los actuadores A1 y A2. Las señales están normalizadas cada una a su desviación estándar y trasladadas temporalmente para que coincidan los picos. Como referencia, en la gráfica también se puede observar una señal senoidal similar a la excitadora. La ventana temporal corresponde a la **parte estacionaria**.

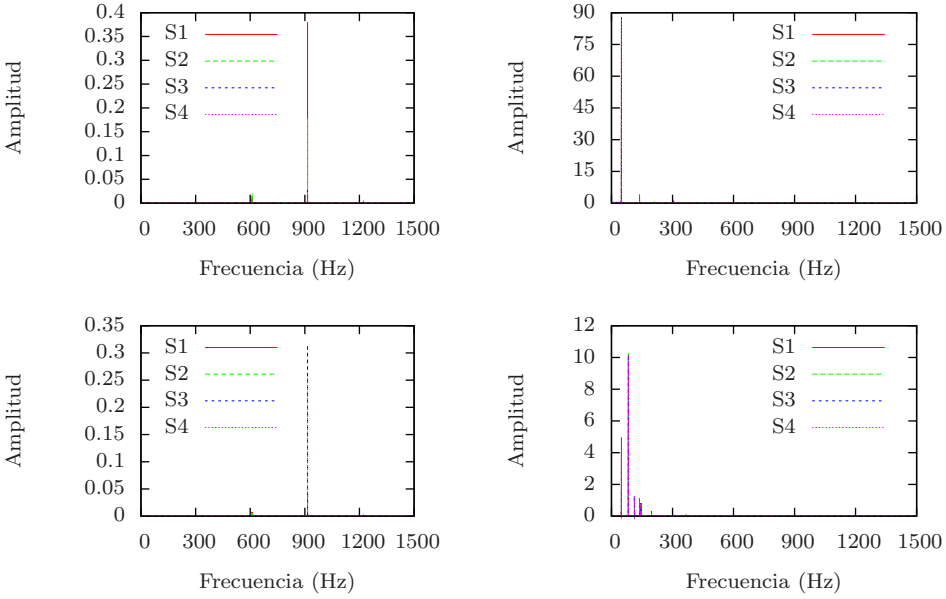


Figura 4.47: Respuesta en Frecuencia, experimental (izquierda) y de simulación (derecha), de la placa Aluminio en los cuatro sensores, ante una excitación senoidal de frecuencia 305 Hz, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo).

Para la placa Aluminio vemos que la correspondencia entre las tres señales es muy buena, así como para la placa CFRP1 usando el actuador A2, pero no así usando el actuador A1, donde la señal experimental no es senoidal pura, ya que de forma sistemática presenta un pequeño pico en valores anteriores a los del pico máximo. Además, se puede observar que a pesar de que los valores máximos positivos estén sincronizados, los valores máximos negativos no lo están. Estos hechos hacen pensar que ante esta excitación la placa CFRP1 vibra de forma que su movimiento sea la composición de los dos modos con frecuencias más próximas a la excitación.

**Estudio de los armónicos de la frecuencia excitadora**

De los resultados anteriores parece deducirse que al excitar las placas con una señal sinusoidal de una frecuencia determinada, los armónicos de dicha frecuencia son introducidos de forma involuntaria en la excitación.

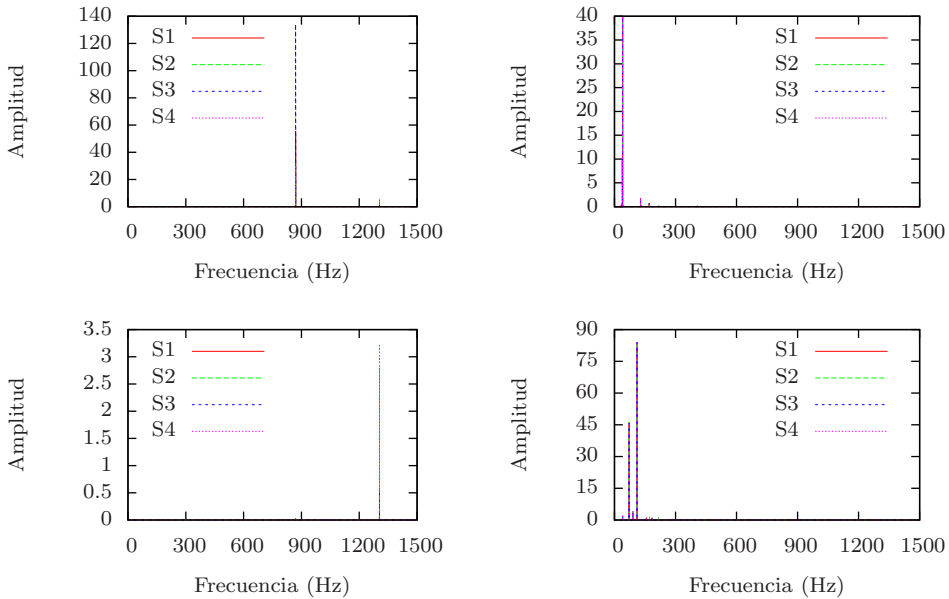


Figura 4.48: Respuesta en Frecuencia, experimental (izquierda) y de simulación (derecha), de la placa CFRP1 en los cuatro sensores, ante una excitación senoidal de frecuencia 435 Hz, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo).

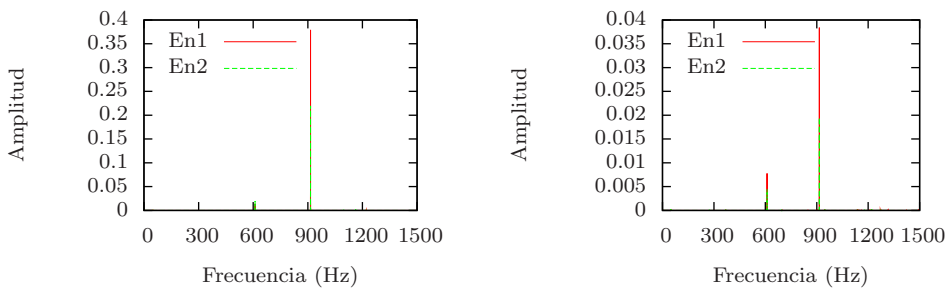


Figura 4.49: Respuesta en Frecuencia de la placa Aluminio en el sensor S1, ante una excitación senoidal de frecuencia 305 Hz, usando los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha), durante dos ensayos experimentales diferentes.

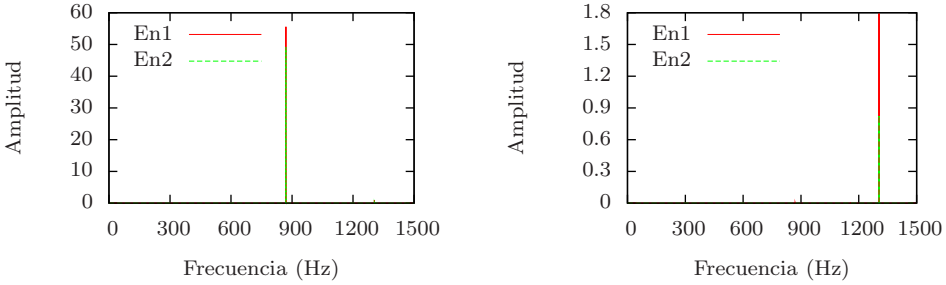


Figura 4.50: Respuesta en Frecuencia de la placa CFRP1 en el sensor S1, ante una excitación senoidal de frecuencia 435 Hz, usando los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha), durante dos ensayos experimentales diferentes.

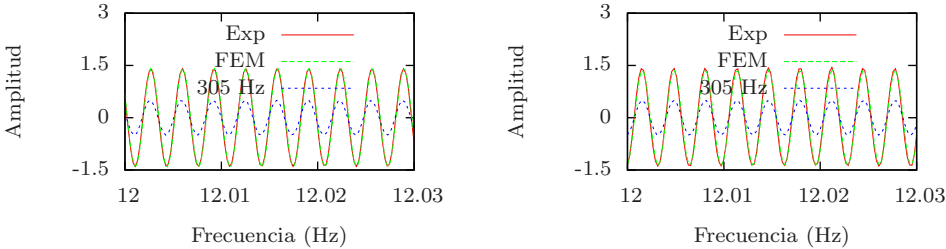


Figura 4.51: Detalle de la respuesta temporal (parte estacionaria), experimental y de simulación, de la placa Aluminio en el sensor S1, ante una excitación senoidal de frecuencia 305 Hz, usando los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha), junto a una señal senoidal similar a la excitadora.

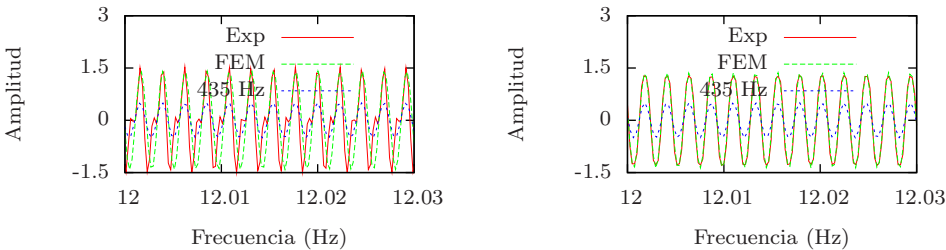


Figura 4.52: Detalle de la respuesta temporal (parte estacionaria), experimental y de simulación, de la placa CFRP1 en el sensor S1, ante una excitación senoidal de frecuencia 435 Hz, usando los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha), junto a una señal senoidal similar a la excitadora.

Para comprobarlo, se realizaron dos tipos de experimentos, que se describen a continuación:

- Medida con excitación senoidal y sensor al aire.

Para comprobar que los picos observados en el análisis frecuencial de los apartados anteriores corresponden a la excitación y no a la placa, se repitieron los experimentos usando excitaciones senoidales, pero en lugar de registrar la señal en los sensores instrumentados sobre la placa, se usó un sensor del mismo tipo e instrumentado de forma similar, colocado sin contacto con la placa, como se observa en la Figura 4.53. Por las propiedades en los sensores piezoeléctricos, este sensor recogerá las vibraciones del aire, a modo de micrófono.

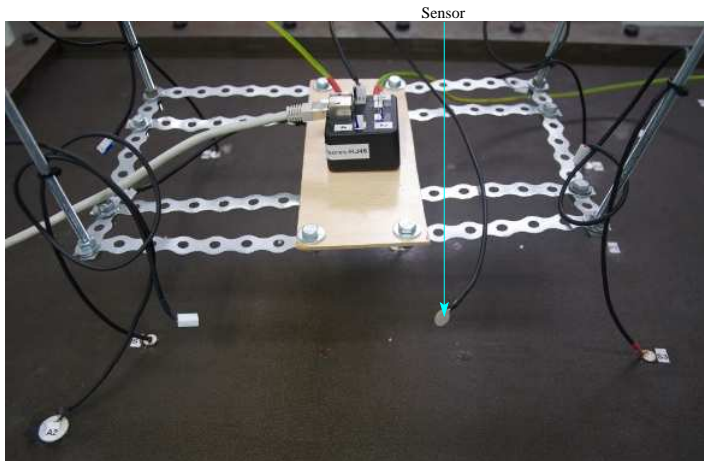


Figura 4.53: Placa CFRP1 con sensor al aire.

Los resultados del análisis en frecuencia (Densidad Espectral de Potencia) de las señales obtenidas se pueden ver en las Figuras 4.54, 4.55 y 4.56 para la placa Aluminio y 4.57, 4.58 y 4.59 para la placa CFRP1. En ellas se observan distintos picos: por un lado, los picos relacionados con el ruido eléctrico, esto es, los picos de 50, 100, 150, 250, 350 y 450 Hz, que aparecen debido al bajo nivel de señal registrado. Por otra lado, podemos ver los picos correspondientes a la excitación y a sus armónicos:

- 270, 405 y 540 Hz para una excitación de 135 Hz.

- 310, 465 y 620 Hz para una excitación de 155 Hz.
- 340, 510 y 680 Hz para una excitación de 170 Hz.
- 610 y 915 para Hz una excitación de 305 Hz.
- 870 y 1305 para Hz una excitación de 435 Hz.

La ausencia de las frecuencias propias de las correspondientes placas en estos resultados parece confirmar que los armónicos de la señal excitadora que aparecen en las señales experimentales no son algo propio de la placa. Al aparecer el primer y segundo armónico, y en menor medida el tercero, estos armónicos podrían estar provocados por un desalineamiento [32], por ejemplo entre el marco y la placa, o bien relacionado con los PZT.

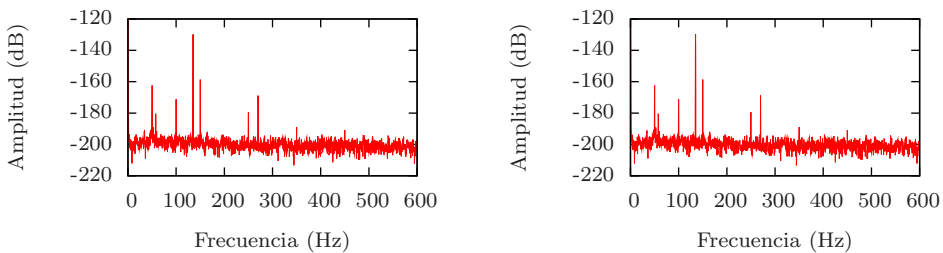


Figura 4.54: Densidad Espectral de Potencia de la señal recogida en el sensor al aire excitando la placa Aluminio con una señal senoidal de 135 Hz, usando los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha).

- Medida con excitación senoidal y PZT directamente conectados.

Para comprobar el origen de estas frecuencias múltiplos de la frecuencia excitadora, se realizó un experimento similar al de la caracterización en frecuencia de los PZT, colocando una pareja de cada tipo de PZT (haciendo las funciones de actuador y sensor) directamente conectados al sistema PULSE, tal y como se muestra en la Figura 3.22, pero excitando en este caso con una señal senoidal de frecuencia 135 Hz.

La Figura 4.60 muestra los resultados obtenidos. En todos ellos se observa un pico de 50 Hz (proveniente del ruido eléctrico), así como los picos de la señal

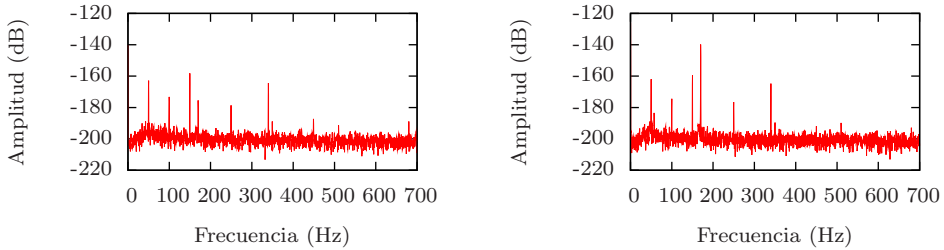


Figura 4.55: Densidad Espectral de Potencia de la señal recogida en el sensor al aire excitando la placa Aluminio con una señal senoidal de 170 Hz, usando los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha).

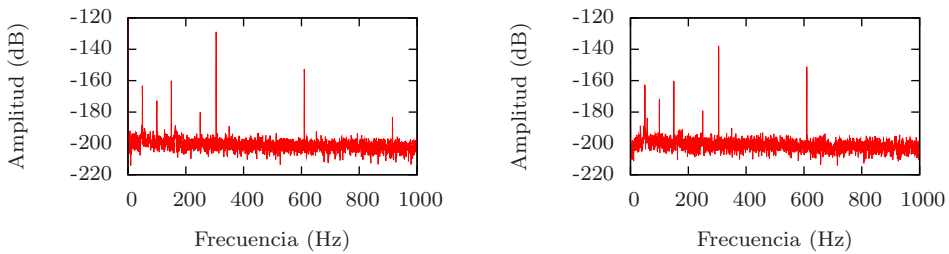


Figura 4.56: Densidad Espectral de Potencia de la señal recogida en el sensor al aire excitando la placa Aluminio con una señal senoidal de 305 Hz, usando los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha).

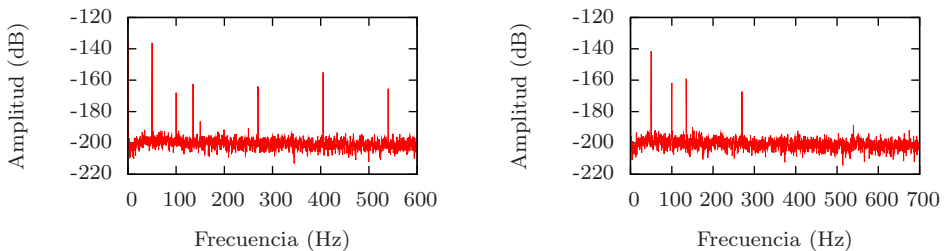


Figura 4.57: Densidad Espectral de Potencia de la señal recogida en el sensor al aire excitando la placa CFRP1 con una señal senoidal de 135 Hz, usando los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha).

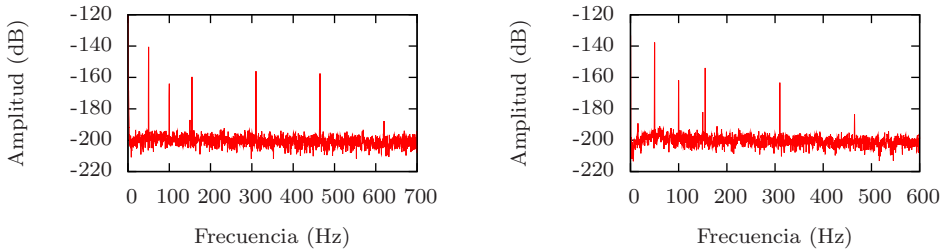


Figura 4.58: Densidad Espectral de Potencia de la señal recogida en el sensor al aire excitando la placa CFRP1 con una señal senoidal de 155 Hz, usando los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha).

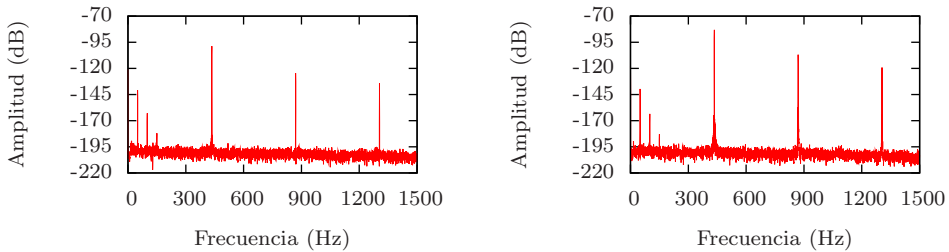


Figura 4.59: Densidad Espectral de Potencia de la señal recogida en el sensor al aire excitando la placa CFRP1 con una señal senoidal de 435 Hz, usando los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha).

excitadora (135 Hz) y sus dos primeros armónicos (270 y 405 Hz). De esta forma podemos concluir que la aparición de los armónicos de la frecuencia excitadora es causada directamente por los PZT. Al aparecer los armónicos 1 y 2 (y en menor medida el 3) la causa podría ser un desalineamiento entre las parejas de PZT (en el caso de este ensayo), o entre el PZT y la placa (en el caso de los ensayos sobre placas), debido al proceso de pegado, o bien algún tipo de desalineamiento interno.



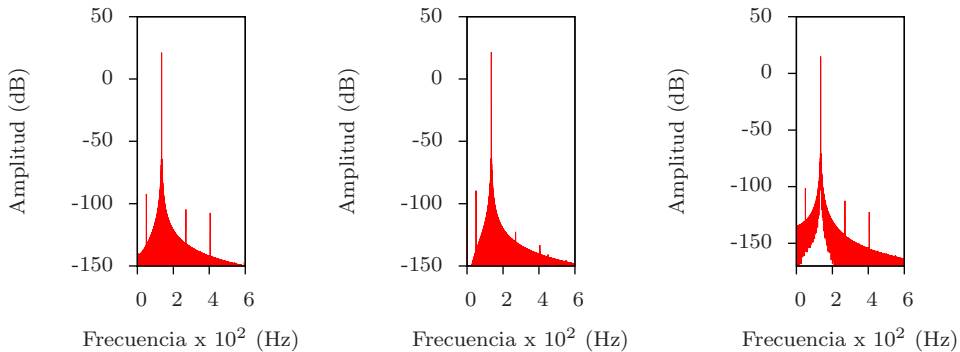


Figura 4.60: Densidad Espectral de Potencia de la señal recogida con una pareja de PZT PRYY+0796 (izquierda), PRYY-0842 (centro) y PRYY+0220 (derecha), conectados directamente, excitando con una señal senoidal de 135 Hz.

#### 4.2.5 Discusión

El análisis de señales temporales obtenidas experimentalmente y mediante simulación FEM, nos aporta las siguientes conclusiones:

- El modelo de Rayleigh en la forma que está implementado en el programa FEAP sobreestima el amortiguamiento de la placa, por lo que no es posible comparar directamente entre sí las respuestas experimentales y de simulación.
- El uso de ruido blanco como señal excitadora proporciona resultados de Respuesta en Frecuencia muy parecidos en ensayos diferentes, tanto en experimento como en simulación, por lo que su uso para detectar daño a partir de cambios en frecuencia globales queda plenamente justificado. En cambio, el uso de señales senoidales como señal excitadora en diferentes ensayos experimentales proporciona resultados de Respuesta en Frecuencia diferentes en amplitud, por lo que este tipo de ensayos no son recomendables para detectar daño mediante cambios globales en la Respuesta en Frecuencia.
- La Respuesta en Frecuencia de las señales transitorias obtenidas mediante simulaciones FEM usando ruido blanco como señal excitadora, sufren un corrimiento de los valores de los picos hacia frecuencias menores respecto al valor de frecuencia obtenido mediante simulación FEM de análisis modal.

- La Respuesta en Frecuencia experimental usando señales senoidales como señal excitadora está dominada por los armónicos de la excitación. Los ensayos llevados a cabo demuestran que este hecho no está causado ni por la placa, ni por el marco, si no probablemente por un desalinamiento entre los PZT usados y la placa, o a un desalineamiento interno de los propios PZT.

## Capítulo 5

# Implementación del daño y técnicas de detección

### 5.1 Daños modelados computacionalmente

Para desarrollar técnicas de detección de daño es conveniente disponer de modelos computacionales que permitan su validación, de forma que podamos evaluar su capacidad de detectar el daño sin necesidad de realizar ensayos sobre placas dañadas reales, aplicando posteriormente las técnicas que funcionen correctamente a casos reales. Esta metodología supone además un importante ahorro económico al poder realizar, si se considera necesario, multitud de daños diferentes con diferente intensidad y posición, sin tener que dañar la placa como se requeriría al validar estas técnicas únicamente mediante ensayos experimentales.

Con ese objetivo se han modelado diferentes tipos de daño tanto mediante FEM como mediante cálculos con el método de Ritz.

Los daños estudiados, aplicados todos ellos a las placas Aluminio y CFRP1, han sido los siguientes:

- Agujero cuadrado de 2 cm de lado.
- Agujero cuadrado de 4 cm de lado.
- Aumento en la densidad (+1 %, +5 % y +10 %) en una área cuadrada de 4 cm de lado.

- Disminución de la densidad (-1 %, -5 % y -10 %) en una área cuadrada de 4 cm de lado.
- Disminución del módulo de Young (-1 %, -5 % y -10 %) en una área cuadrada de 4 cm de lado. En el caso de la placa CFRP1, la disminución se produce en ambos módulos de Young (longitudinal y transversal) con el mismo porcentaje. Por su especial interés, en la técnica expuesta en la Sección 5.3.3 se utilizaron adicionalmente los valores -15 %, -20 % y -25 %.

Para el análisis modal, cada uno de los daños se encontraba en tres posiciones diferentes (una sola posición para cada simulación o cálculo):

- Centrado en  $x = 0.670$  m,  $y = 0.495$  m (P1).
- Centrado en  $x = 0.605$  m,  $y = 0.325$  m (P2).
- Centrado en  $x = 0.755$  m,  $y = 0.555$  m (P3).

Para el análisis transitorio mediante simulación FEM solo se consideró la posición P1. Estas posiciones quedan definidas en la Tabla 5.2, y esquematizadas en la Figura 5.2, ambas en la Sección 5.2.

Para la placa CFRP2 no se ha hecho ningún estudio computacional de daño.

### 5.1.1 Simulación mediante FEM

Para modelar estos daños mediante una simulación FEM se han llevado a cabo nuevas simulaciones, en las que los principales cambios respecto a las implementaciones descritas en las Secciones 4.1.2 y 4.2.2 son un nuevo mallado y la introducción de un nuevo material (excepto para los agujeros), con sus correspondientes nuevos parámetros.

Para señalar la posición del daño se introdujeron los siguientes parámetros (para P1, P2 y P3 respectivamente):

```
px = 0.670      ! posición del defecto (centro, eje x)
py = 0.495      ! posición del defecto (centro, eje y)

px = 0.605      ! posición del defecto (centro, eje x)
py = 0.325      ! posición del defecto (centro, eje y)
```

## 5.1. Daños modelados computacionalmente

---

```
px = 0.755      ! posición del defecto (centro, eje x)
py = 0.555      ! posición del defecto (centro, eje y)
```

En cuanto al mallado, se pasó a un mallado dividido en varios bloques, necesitando introducir los siguientes parámetros (ad y bd toman el valor 0.02 en el caso del agujero de 2 cm):

```
ad = 0.04       ! tamaño del defecto (eje x)
bd = 0.04       ! tamaño del defecto (eje y)
a1 = px-ad/2    ! principio del defecto (eje x)
a2 = px+ad/2    ! final del defecto (eje x)
b1 = py-bd/2    ! principio del defecto (eje y)
b2 = py+bd/2    ! final del defecto (eje y)
m1 = a1/(a/m)   ! elementos antes del defecto (eje x)
md = ad/(a/m)   ! elementos del defecto (eje x)
m2 = m-m1-md    ! elementos después del defecto (eje x)
n1 = b1/(b/n)   ! elementos antes del defecto (eje y)
nd = bd/(b/n)   ! elementos del defecto (eje y)
n2 = n-n1-nd    ! elementos después del defecto (eje y)
```

El mallado viene definido por cinco bloques, cuatro de los cuales definen la parte de placa que permanece sin daño, dejando en medio un hueco.

```
BLOCK 1                                BLOCK 3
CART, m, n1, , , 1                     CART, m2, nd, , , 1
1, 0.0, 0.0, 0.0                       1, a2, b1, 0.0
2,  a, 0.0, 0.0                         2,  a, b1, 0.0
3,  a,  b1, 0.0                          3,  a, b2, 0.0
4, 0.0,  b1, 0.0                        4, a2, b2, 0.0

BLOCK 2                                BLOCK 4
CART, m1, nd, , , 1                     CART, m, n2, , , 1
1, 0.0, b1, 0.0                          1, 0.0, b2, 0.0
2,  a1, b1, 0.0                          2,  a, b2, 0.0
3,  a1, b2, 0.0                          3,  a,  b, 0.0
4, 0.0, b2, 0.0                          4, 0.0,  b, 0.0
```

En el caso de los agujeros no es necesario añadir ningún bloque más, aunque resulta útil añadir el siguiente bloque:

```
BLOCK 5
CART, md-2, nd-2, , , 1
1, a1+a/m, b1+b/n, 0.0
2, a2-a/m, b1+b/n, 0.0
3, a2-a/m, b2-b/n, 0.0
4, a1+a/m, b2-b/n, 0.0
```

Este bloque está completamente separado de los demás, por lo que no afecta a los cálculos. Sin embargo resulta útil ya que su introducción provoca que estas simulaciones tengan el mismo número de nodos y en la misma posición que la placa sin daño, permitiendo una correcta visualización de los modos y una comparación con el modo de la placa sin daño más fácil.

Para evitar que este último bloque esté libre y obtener los llamados “modos de sólido rígido”, se puede añadir el siguiente código que fija todos los nuevos nodos excepto el último:

```
BOUNDary
m*n+3*m+n-md*nd+5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1
m*n+3*m+n-md-nd+4, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1
```

De esta forma el único nodo suelto vibrará a una frecuencia muy alta, y sus modos no aparecerán en el análisis.

En el caso de los otros defectos, el hueco será rellenado con un nuevo bloque, pero usando un material diferente (definido por el número después de las comas):

```
BLOCK 5
CART, md, nd, , , 2
1, a1, b1, 0.0
2, a2, b1, 0.0
3, a2, b2, 0.0
4, a1, b2, 0.0
```

Este nuevo material debe estar definido. Para ello, en la sección de parámetros debemos añadir una nueva densidad o un(os) nuevo(s) módulo(s) de Young, según el tipo de defecto, consistente en multiplicar el parámetro a modificar por un coeficiente, de forma que se obtenga el valor deseado. Como ejemplos, para un aumento de densidad de +1 % el nuevo parámetro será:

```
dn = d*1.01    ! densidad del defecto
```

y para una disminución del 1 % en los módulos de Young de la placa CFRP1:

```
e1 = ex*0.99    ! módulo de Young longitudinal a las fibras en el defecto
e2 = ey*0.99    ! módulo de Young transversal a las fibras en el defecto
```

Con los parámetros introducidos se puede definir el nuevo material, de la forma general:

```
MATERial, 2
SHELL
ELASTic, ISOTropic, en, nu
DENSity, , dn
THICKness, , h
```

o bien:

```
MATERial, 2
SHELL
ELASTic, ORTHotropic, e1, e2, e2, nu, nu, nu, g, g, g
DENSity, , dn
THICK, , h
```

según sea la placa Aluminio o CFRP1, respectivamente. El código mostrado implementa los dos cambios a la vez, si bien en las simulaciones realizadas o bien  $dn = d$  (si el cambio es en la densidad) o bien  $en = e$ ,  $e1 = ex$  y  $e2 = ey$  (si el cambio es en los modulos de Young).

### 5.1.2 Cálculo semianalítico mediante el método de Ritz

En el caso de las placas Aluminio y CFRP1 con defecto, la Ecuación (2.68) constará de dos partes: la parte sin daño y la parte dañada. A la hora de implementar el código, se puede elegir entre:

- Hacer las integrales sobre la placa completa en cuatro (para los agujeros) o cinco trozos (para el resto de defectos), de forma similar a la creación del mallado en FEM.
- Hacer las integrales sobre la placa completa con los parámetros del material sin daño, y restarle las integrales sobre la zona dañada usando de nuevo dichos parámetros, para posteriormente sumarle las integrales sobre la zona dañada usando los parámetros del material dañado (obviamente este paso no es necesario para los agujeros). Esta ha sido la opción elegida por ser menos costosa computacionalmente. De esta forma, la Ecuación (2.68) queda como:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \left\{ \int_0^a \int_0^b \left( D_{11}^u \frac{d^2 X_i}{dx^2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} Y_j Y_n + D_{22}^u X_i X_m \frac{d^2 Y_j}{dy^2} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \right. \right. \\
 & + D_{12}^u \left( \frac{d^2 X_i}{dx^2} X_m Y_j \frac{d^2 Y_n}{dy^2} + X_i \frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{d^2 Y_j}{dy^2} Y_n \right) + 4D_{66}^u \frac{dX_i}{dx} \frac{dX_m}{dx} \frac{dY_j}{dy} \frac{dY_n}{dy} \\
 & \quad + 2D_{16}^u \left( \frac{d^2 X_i}{dx^2} \frac{dX_m}{dx} Y_j \frac{dY_n}{dy} + \frac{dX_i}{dx} \frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{dY_j}{dy} Y_n \right) \\
 & \quad \left. + 2D_{26}^u \left( \frac{dX_i}{dx} X_m \frac{dY_j}{dy} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} + X_i \frac{dX_m}{dx} \frac{d^2 Y_j}{dy^2} \frac{dY_n}{dy} \right) \right) dx dy \\
 & - \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \left( D_{11}^u \frac{d^2 X_i}{dx^2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} Y_j Y_n + D_{22}^u X_i X_m \frac{d^2 Y_j}{dy^2} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \right. \\
 & + D_{12}^u \left( \frac{d^2 X_i}{dx^2} X_m Y_j \frac{d^2 Y_n}{dy^2} + X_i \frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{d^2 Y_j}{dy^2} Y_n \right) + 4D_{66}^u \frac{dX_i}{dx} \frac{dX_m}{dx} \frac{dY_j}{dy} \frac{dY_n}{dy} \\
 & \quad + 2D_{16}^u \left( \frac{d^2 X_i}{dx^2} \frac{dX_m}{dx} Y_j \frac{dY_n}{dy} + \frac{dX_i}{dx} \frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{dY_j}{dy} Y_n \right) \\
 & \quad \left. + 2D_{26}^u \left( \frac{dX_i}{dx} X_m \frac{dY_j}{dy} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} + X_i \frac{dX_m}{dx} \frac{d^2 Y_j}{dy^2} \frac{dY_n}{dy} \right) \right) dx dy \\
 & + \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \left( D_{11}^d \frac{d^2 X_i}{dx^2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} Y_j Y_n + D_{22}^d X_i X_m \frac{d^2 Y_j}{dy^2} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \right. \\
 & + D_{12}^d \left( \frac{d^2 X_i}{dx^2} X_m Y_j \frac{d^2 Y_n}{dy^2} + X_i \frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{d^2 Y_j}{dy^2} Y_n \right) + 4D_{66}^d \frac{dX_i}{dx} \frac{dX_m}{dx} \frac{dY_j}{dy} \frac{dY_n}{dy} \\
 & \quad + 2D_{16}^d \left( \frac{d^2 X_i}{dx^2} \frac{dX_m}{dx} Y_j \frac{dY_n}{dy} + \frac{dX_i}{dx} \frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{dY_j}{dy} Y_n \right) \\
 & \quad \left. + 2D_{26}^d \left( \frac{dX_i}{dx} X_m \frac{dY_j}{dy} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} + X_i \frac{dX_m}{dx} \frac{d^2 Y_j}{dy^2} \frac{dY_n}{dy} \right) \right) dx dy \\
 & - \left( \int_0^a \int_0^b (\rho^u h \omega^2 X_i X_m Y_j Y_n) dx dy - \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} (\rho^u h \omega^2 X_i X_m Y_j Y_n) dx dy \right. \\
 & \quad \left. + \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} (\rho^d h \omega^2 X_i X_m Y_j Y_n) dx dy \right) \} A_{mn} = 0; \\
 & \quad i = 1, \dots, M; \quad j = 1, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Según el tipo de daño será diferente la densidad o los componentes del tensor  $\mathbb{D}$ . Para implementar esto se operó de una manera parecida a como se hace en las simulaciones FEM, identificando los diferentes materiales con números, y siendo este número un parámetro de la función que calcula las integrales analíticamente.



## 5.2 Daños estudiados mediante ensayos experimentales

Los daños estudiados experimentalmente contaron con la importante limitación de ser necesariamente no destructivos, ya que no se disponía de un fácil acceso a nuevas placas. Teniendo en cuenta esta limitación, los daños estudiados fueron los siguientes:

### 5.2.1 Daños por masa añadida

Este daño fue implementado mediante la colocación de una masa encima de la placa sin ningún tipo de sujeción adicional. Se utilizaron 6 valores de masas diferentes, definidos en la Tabla 5.1.

M1	M2	M3	M4	M5	M6
6.7	12.8	24.7	39.6	85.8	192.9

Tabla 5.1: Valores (en g) de las masas usadas como daño en los ensayos experimentales.

Cada una de ellas se colocó en diferentes posiciones. En el caso de las placas Aluminio y CFRP1 se usaron las tres posiciones descritas en la Sección 5.1, que quedan definidas en la Tabla 5.2.

P1	$x = 0.670$	$y = 0.495$
P2	$x = 0.605$	$y = 0.325$
P3	$x = 0.755$	$y = 0.555$

Tabla 5.2: Posiciones de colocación de las masas añadidas en las placas Aluminio y CFRP1 (en m).

Para la placa CFRP2 se usaron 6 posiciones diferentes (las tres primeras en la parte delgada y las tres siguientes en la parte gruesa), descritas en la Tabla 5.3.

P1	$x = 1.20$	$y = 0.700$
P2	$x = 1.26$	$y = 0.445$
P3	$x = 1.30$	$y = 0.750$
P4	$x = 0.30$	$y = 0.700$
P5	$x = 0.40$	$y = 0.445$
P6	$x = 0.16$	$y = 0.725$

Tabla 5.3: Posiciones de colocación de las masas añadidas en la placa CFRP2 (en m) .

Es necesario reseñar que con esta notación, P1, P2 y P3 no definen unívocamente unas coordenadas, sino que se debe especificar de qué placa se está hablando.

En la Figura 5.1 se pueden observar las masas usadas. En la Figuras 5.2 y 5.3 se pueden observar los esquemas con las posiciones donde se añadió la masa (nunca más de una a la vez para toda la placa). Finalmente en la Figura 5.4 se puede observar la placa CFRP1 con la masa añadida M1 durante la realización de un ensayo.

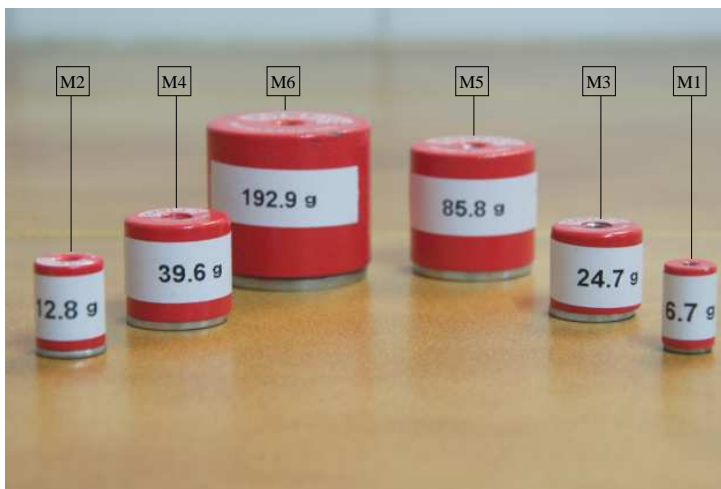


Figura 5.1: Masas usadas como daño.

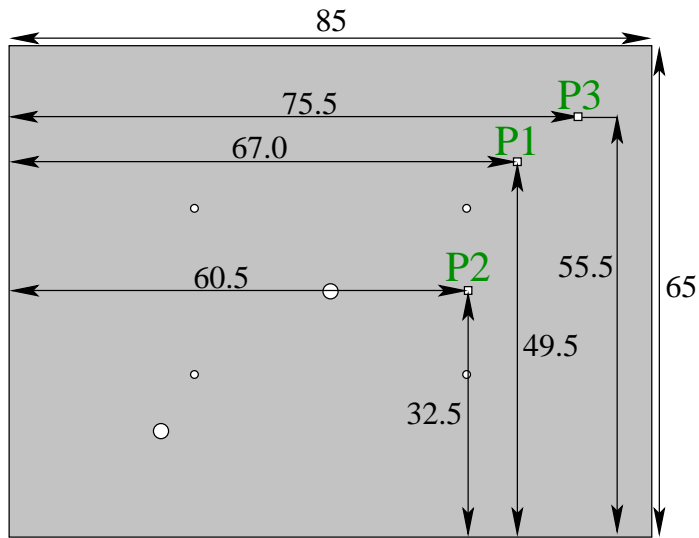


Figura 5.2: Esquema de posiciones de masas añadidas en las placas Aluminio y CFRP1. Medidas en cm.

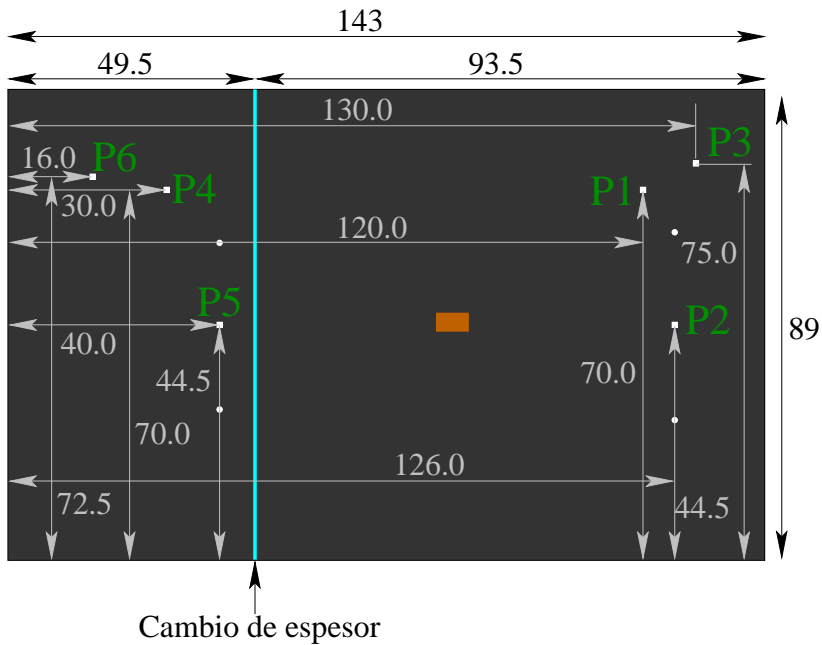


Figura 5.3: Esquema de posiciones de masas añadidas en la placa CFRP2. Medidas en cm.

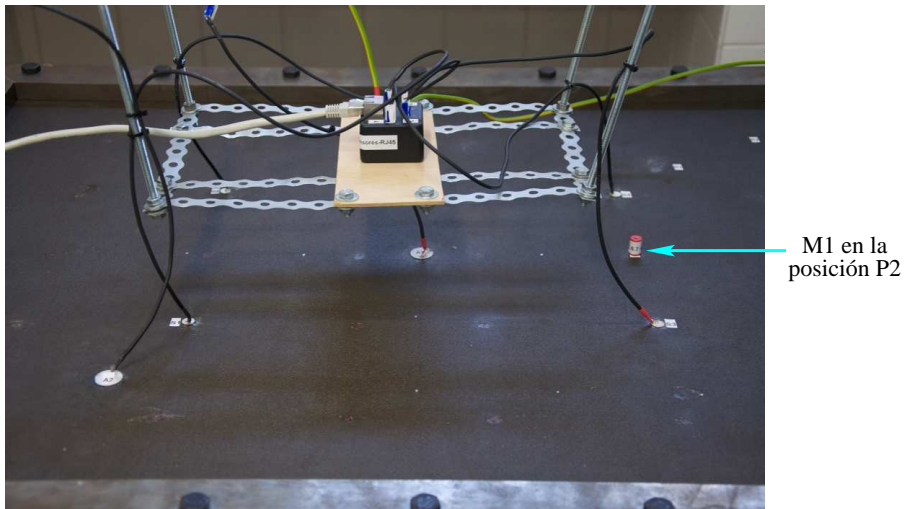


Figura 5.4: Placa CFRP1 con masa añadida M1 en la posición P2.

### 5.2.2 Daños por cambio en las condiciones de contorno

Este daño fue implementado en las placas Aluminio y CFRP1, apretando todos los pares tornillo-tuerca del marco de ambas placas a un torque menor del considerado para los ensayos sin daño (60 N·m). Los valores de torque usados fueron:

CC1	CC2	CC3	CC4	CC5	CC6	CC7	CC8	CC9	CC10	CC11
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55

Tabla 5.4: Valores de torque usados en los ensayos experimentales para aplicar daño mediante cambio en las condiciones de contorno (en N·m).

### 5.2.3 Daños por cambio de temperatura

Se comprobó el efecto de los cambio de temperatura en la Respuesta en Frecuencia de las placas, mediante los siguientes ensayos:

- Para las tres placas objeto de estudio, se realizarón ensayos a temperatura ambiente ( $T_0$ ) para, a continuación, aumentar la temperatura del laboratorio y repetir los ensayos a cuatro temperaturas diferentes ( $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  y  $T_4$ ),

sin apretar ni desapretar en ningún momento los pares tornillo-tuerca. Las temperaturas registradas directamente en la placa mediante un termómetro de infrarrojos fueron las siguientes:

- Placa Aluminio: 23 °C (T0), 25 °C (T1), 27 °C (T2), 29 °C (T3) y 30 °C (T4).
  - Placa CFRP1: 23 °C (T0), 26 °C (T1), 28 °C (T2), 29 (T3) y 30 °C (T4).
  - Placa CFRP2: 23.5 °C (T0), 26 °C (T1), 28 °C (T2), 29 °C (T3) y 30 °C (T4).
- Para las placas Aluminio y CFRP1, se repitieron los ensayos con placa cuasilibre (Figura 3.17). Las temperaturas registradas directamente en la placa mediante un termómetro de infrarrojos fueron las siguientes:
    - Placa Aluminio: 25 °C (T0), 26 °C (T1), 27 °C (T2), 29 °C (T3) y 30 °C (T4).
    - Placa CFRP1: 23.5 °C (T0), 24 °C (T1), 26.5 °C (T2), 27.5 °C (T3) y 29 °C (T4).
  - Para las placas Aluminio y CFRP1, con los pares tornillo-tuerca apretados a un torque de 60 N·m, se realizaron consecutivamente los siguientes ensayos:
    - Se realizó el ensayo a temperatura ambiente (T0, Medida 1).
    - Se aumentó la temperatura del laboratorio, repitiendo el ensayo (T1, Medida 2).
    - A esta temperatura (T1), se procedió al desapretado de todos los pares tornillo-tuerca, para posteriormente volverlos a apretar y repetir el ensayo de nuevo (Medida 3).
    - Finalmente, se dejó enfriar el laboratorio hasta temperatura ambiente (T2) y se repitió el ensayo por última vez (Medida 4).

La Figura 5.5 muestra una representación de la temperatura del laboratorio y de la diferencia de temperatura con la del momento en que se aprietan los tornillos ( $T-T_a$ ), durante las cuatro medidas en los ensayos calentando y enfriando la placa.

Las temperaturas registradas directamente en la placa mediante un termómetro de infrarrojos fueron las siguientes:

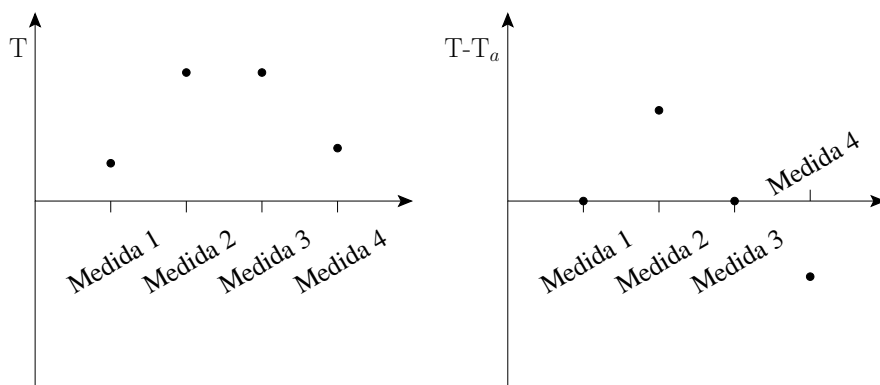


Figura 5.5: Representación de la temperatura del laboratorio (izquierda) y de la diferencia de temperatura con la del momento en que se aprietan los tornillos (derecha) durante las cuatro medidas en los ensayos calentando y enfriando la placa.

- Placa Aluminio: 23 °C (T0), 28 °C (T1) y 24 °C (T2).
- Placa CFRP1: 20 °C (T0), 25 °C (T1) y 21 °C (T2).

Es necesario indicar que debido a las malas condiciones de aislamiento térmico del laboratorio, las medidas de temperatura no son totalmente fiables, por lo que se deben considerar los resultados en una forma más cualitativa que cuantitativa.

## 5.3 Técnicas de detección de daño usadas

### 5.3.1 Modal Assurance Criterion (MAC)

La primera técnica usada a lo largo de este trabajo para detección de daño mediante análisis modal fue la conocida como *Modal Assurance Criterion* (MAC). Esta técnica clásica ha sido ampliamente usada para detectar daño mediante análisis modal a lo largo de los últimos 30 años, con fines industriales y de investigación, por lo que es buen punto de partida para comprobar la validez de los modelos de daño expuestos en la Sección 5.1.

La técnica fue definida por Allemang [8, 10] y consiste en definir un indicador de tipo estadístico para medir la correlación de los vectores modales, mediante la siguiente expresión:

$$MAC_{ij} = \frac{\left| \sum_{n=1}^{N_n} z_{ni} z_{nj} \right|^2}{\sum_{n=1}^{N_n} z_{ni} z_{ni} \sum_{n=1}^{N_n} z_{nj} z_{nj}}, \quad (5.2)$$

donde  $N_n$  es el número de nodos de cada modo,  $z_{ni}/z_{nj}$  es el desplazamiento transversal del nodo  $n$  en el modo  $i/j$ , el subíndice  $i$  se refiere a los modos de la placa de referencia (sin daño) y el subíndice  $j$  a los modos de la placa inspeccionada (con o sin daño). Ambos índices corren sobre todos los modos estudiados.

De esta forma se obtiene una matriz, que en caso de placas sin daño tendrá el valor uno en la diagonal principal (los modos están totalmente correlacionados) y cero en el resto de la matriz (los modos no tienen ninguna correlación). Las desviaciones de estos valores (que siempre tendrán un valor entre cero y uno) indican la presencia de daño en la placa inspeccionada. Las expresiones (5.3) y (5.4) ilustran unos valores genéricos para un caso sin daño y con daño, respectivamente:

$$MAC^{\text{sin daño}} = \begin{pmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

$$MAC^{\text{con daño}} = \begin{pmatrix} 1.000 & 0.002 & 0.005 & 0.001 \\ 0.002 & 0.980 & 0.012 & 0.008 \\ 0.005 & 0.012 & 0.990 & 0.000 \\ 0.001 & 0.008 & 0.000 & 1.000 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

La técnica, junto a sus múltiples variantes [9], ha sido ampliamente usada para detectar daño [6, 76, 101, 103, 121, 127, 129, 133].

A lo largo de este trabajo los vectores modales usados han sido los formados por la coordenada  $z$  (desplazamiento transversal) de cada uno de los nodos de la malla de Elementos Finitos. Por compatibilidad, para los modos calculados mediante el método de Ritz se ha usado el mismo vector, calculando los valores para esos puntos concretos. Los resultados obtenidos mediante esta técnica se pueden observar en la Sección 6.2.

### 5.3.2 Transformada Wavelet bidimensional usando información de la placa sin daño

La segunda técnica usada en este trabajo para detección de daño mediante análisis modal está basada en la Transformada Wavelet continua [48, 94]. Es una técnica matemática relativamente reciente, ya que apenas lleva siendo usada 30 años. Los primeros trabajos datan de principios del siglo XX, por Haar [69], pero no fue hasta 1976 cuando se definió la Transformada Wavelet continua (llamada originalmente *cochlear*) en un trabajo sobre la reacción del oído al sonido<sup>1</sup> [142], mientras en 1984 fue definida la Transformada Wavelet continua en su formulación actual [68]. En las décadas 80 y 90 se produjeron numerosas aportaciones teóricas que ampliaron el campo de aplicación de la Transformada Wavelet [46] y permitieron la creación de numerosas funciones base, adaptadas a cada necesidad [124], y el desarrollo de la Transformada Wavelet discreta, que no se ha usado en esta Tesis pero que tiene una gran importancia en numerosos campos, como en compresión de señales, eliminación de ruido y tratamiento de imágenes [91]. Esto ha provocado que hayan surgido numerosas aplicaciones de la Transformada Wavelet continua en el ámbito de la Física y la Ingeniería, como por ejemplo en Mecánica de Fluidos [55], solución numérica de ecuaciones en derivadas parciales [18], Física de la atmósfera [57], análisis de señales fisiológicas [72] y, en relación a la temática de esta Tesis, detección de daño en estructuras, tanto aplicándola a señales espaciales [33, 35, 36, 40, 41, 51, 52, 54, 66, 67, 85, 86, 88, 99, 110, 123, 128, 132, 139], como temporales [33].

La Transformada Wavelet supone un cambio de mentalidad respecto a otras transformadas como la Transformada de Fourier, ya que en lugar de un análisis tiempo-frecuencia (o espacio-momento) se hace uso de una nueva variable: la escala. Matemáticamente, definimos la Transformada Wavelet continua de una función  $f(x)$  como

$$W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left( \frac{x - b}{a} \right) f(x) dx, \quad (5.5)$$

donde  $a (> 0)$  y  $b$  son los parámetros de dilatación (la escala) y traslación, respectivamente.  $\psi(x)$  es la función base wavelet y el asterisco indica el complejo

---

<sup>1</sup> *Cochlea* es la palabra en inglés para designar al caracol (o cóclea), una parte del oído interno.



conjugado. La Transformada Wavelet también puede definirse en el espacio de la frecuencia como

$$W(a, b) = \sqrt{a} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}^*(a\omega) \hat{f}(\omega) e^{ib\omega} d\omega, \quad (5.6)$$

donde  $\hat{\cdot}$  indica la Transformada de Fourier.

La Ecuación (5.5) es fácilmente generalizable a dos dimensiones, donde en este caso  $b$  será un vector de componentes  $b_x, b_y$ :

$$W(a, b_x, b_y) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left( \frac{x - b_x}{a}, \frac{y - b_y}{a} \right) f(x, y) dx dy. \quad (5.7)$$

Una de las características principales de la Transformada Wavelet continua es que la base de la transformada (la función base wavelet  $\psi(x, y)$ ) no está definida unívocamente, sino que existen múltiples opciones. Por ejemplo, entre las wavelets con una sola función madre podemos citar las wavelets Haar, Mexican Hat, Morlet [46], Gabor [92] o Meyer [46]. Entre las wavelets que forman parte de una familia podemos citar las wavelets Daubechies, Biortogonales, Coiflets y Symlets [46].

En los resultados presentados en esta Memoria siempre se ha hecho uso de la Transformada Wavelet continua bidimensional  $W(a, b_x, b_y)$ , que depende de tres variables. Para poder hacer una representación tridimensional, se debe fijar una de ellas, que en este caso ha sido la escala. Como función base wavelet se ha usado la llamada **Wavelet Halo**, también conocida como **Wavelet de Morlet Isotrópica**, definida en [45]. Esta wavelet se define en el dominio de la frecuencia de la siguiente forma:

$$\hat{\psi}(\omega) = \exp \left( -\frac{(|\omega| - \omega_0)^2}{2} \right), \quad (5.8)$$

donde  $\omega$  es el vector de frecuencias y  $\omega_0$  es un parametro.

La Figura 5.6 muestra la Wavelet Halo tanto en el dominio espacial/temporal como en el de momentos/frecuencia. Esta wavelet tiene tres momentos nulos, por lo que puede detectar singularidades hasta la cuarta derivada de la señal. Puesto que las vibraciones transversales de las placas se rigen por la expresión (2.49), que es una ecuación en derivadas parciales de cuarto orden en las variables espaciales, el número de momentos nulos es el apropiado para detectar daño. Una wavelet con un

menor número de momentos nulos no es apropiada para detectar una discontinuidad de cuarto orden, mientras que una wavelet con más momentos nulos detectará el daño pero, al tener un soporte compacto más ancho la localización del daño se hará con una menor precisión.

Esta wavelet es isótropa y siempre real. Para satisfacer la condición de admisibilidad ( $|\omega_0| > 5.5$ , ver Ref. [11]) el parámetro  $\omega_0$  fue elegido como **seis** (valor por defecto del *toolbox*) en todos los casos. En cuanto a la escala, es necesario considerar que el ancho de la función  $\psi$  depende del número mínimo de divisiones en un eje (130 en este caso). Las escalas óptimas para detección de daño fueron aquellas que permitían que entre el primer y el segundo pico de la wavelet (en el dominio espacial) hubiera un número de elementos comprendido entre cuatro y seis, que aproximadamente corresponde con unos valores de la escala entre catorce y veinte. La **escala** elegida fue **diecisiete**. Todos los cálculos fueron realizados usando Matlab® y la *toolbox* YAWTb [73]. Estos datos quedan resumidos en la Tabla 5.5.

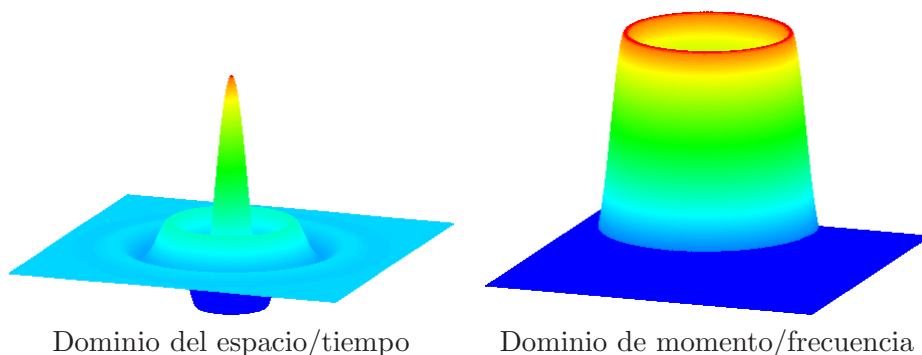


Figura 5.6: Wavelet Halo en el dominio del espacio/tiempo (izquierda) y en el dominio de momento/frecuencia (derecha).

Wavelet base	Halo Wavelet
$\omega_0$	6
Escala	17
Software	Matlab+YAWTb

Tabla 5.5: Datos relacionados con la Transformada Wavelet.

Un problema conocido asociado a la Transformada Wavelet de señales acotadas

es el llamado “efecto de borde”, cuyo estudio supone en sí mismo un subcampo de investigación [7, 31, 74, 135]. En este caso, la aparición de efectos de borde se evitó en lo posible mediante el comando de Matlab `dwtmode`, que extiende las señales simétricamente (a modo de espejo) de forma automática.

La Transformada Wavelet continua así implementada se aplicó a los modos de vibración, tanto para las placas sin daño como para las placas con daño. Para detectar la presencia de este, se usó un índice de daño similar al de [35], pero en dos dimensiones:

$$D(x, y) = |W(M_d(x, y)) - W(M_u(x, y))|, \quad (5.9)$$

donde  $W(M_d(x, y))$  y  $W(M_u(x, y))$  son la Transformada Wavelet continua de un modo con daño y del mismo modo sin daño, respectivamente.

Los resultados obtenidos mediante esta técnica se pueden observar en la Sección 6.3.

#### 5.3.3 Transformada Wavelet bidimensional sin usar información de la placa sin daño

La tercera y última técnica usada en este trabajo para detección de daño mediante análisis modal se fundamenta en el uso de un procedimiento híbrido basado en el método de Ritz y la Transformada Wavelet continua bidimensional, que nos permite detectar daño sin usar la información de la placa sin daño. La técnica se esquematiza en la Figura 5.7. Aunque en este caso se han usado modos generados mediante simulación FEM, la técnica permitiría también usar modos obtenidos mediante cualquier otro método, por ejemplo, de forma experimental, por lo que podría resultar de gran utilidad práctica.

- En primer lugar se obtienen, para las placas dañadas, los primeros cuatro modos de vibración ( $M_d$ ) cuya forma sea compatible con las dos primeras funciones en cada eje usadas en el método de Ritz, expresiones (2.72) y (2.73). En el caso de la placa Aluminio estos modos son los modos 1, 2, 3 y 5, mientras en la placa CFRP1 son los modos 1, 2, 3 y 4. Por otro lado, se obtienen las frecuencias naturales correspondientes a esos modos  $f_i$ . En los casos aquí estudiados se usó simulación FEM para obtener estos modos.

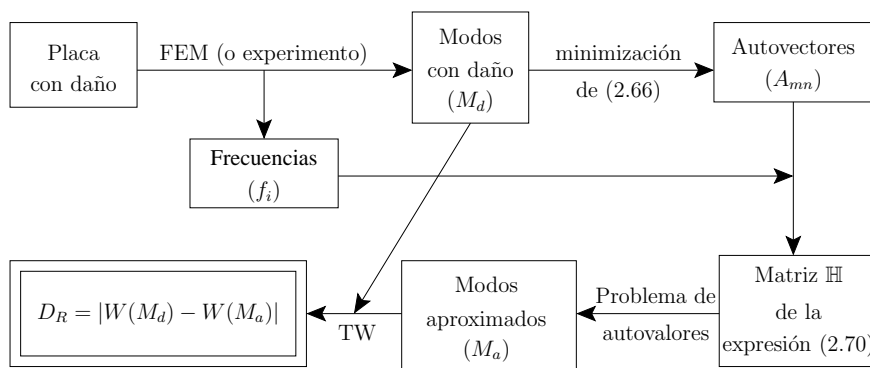


Figura 5.7: Diagrama de bloques para la técnica híbrida de detección de daño basada en el método de Ritz y la Transformada Wavelet.

- A continuación, usando la expresión (2.66) con  $M = N = 2$ , y un conjunto de funciones compatibles con las condiciones de contorno (en este caso, empotrada-empotrada, expresiones (2.72) y (2.73), con las constantes de la Sección B.3.1), se calculan los valores  $A_{mn}$  que mejor ajustan a los modos de la placa con daño, mediante un procedimiento estándar de minimización.
- De los valores  $A_{mn}$  (los autovectores) y las frecuencias  $f_i$ , se obtiene una aproximación de la matriz  $\mathbb{H}$  de la expresión (2.70). Esta matriz es una aproximación de la matriz  $\mathbb{H}$  que puede ser obtenida mediante el método de Ritz con  $M = N = 2$ , por lo que mediante un procedimiento estándar de extracción de autovalores y autovectores, se obtienen las frecuencias y los modos de vibración ( $M_a$ ), que llamaremos modos aproximados. Estos nuevos modos de vibración son una aproximación a los modos originales, puesto que solo se usan cuatro términos en la expresión (2.66), por lo que se pierde cierta información.
- De acuerdo a la Referencia [67], podemos suponer que esa información perdida contendrá mayoritariamente los detalles asociados al daño, por lo que estos nuevos modos aproximados ( $M_a$ ) pueden ser usados como los “modos sin daño” de la expresión (5.9).
- De esta forma se define un nuevo índice de daño  $D_R$ , como:

$$D_R(x, y) = |W(M_d(x, y)) - W(M_a(x, y))|, \quad (5.10)$$

donde  $W(M_d(x, y))$  y  $W(M_a(x, y))$  son la Transformada Wavelet continua de un modo con daño y del modo aproximado equivalente (calculado mediante esta técnica), respectivamente. Esta expresión es similar a (5.9), pero usando los modos aproximados en lugar de los modos de la placa sin daño. La técnica admite diferentes valores de  $M$  y  $N$ , siempre que los modos de los que se parta sean compatibles con las funciones correspondientes.

La Transformada Wavelet continua implementada para el índice de daño  $D_R$  es similar a la implementada para el índice de daño  $D$ , salvo la extensión de los modos, que se hizo de la siguiente forma:

- Se eliminaron los nodos correspondientes a los bordes de la placa.
- Se extrapoló la señal, línea a línea y por cada lado, mediante el comando `spline` en Matlab®.

La Figura 5.8 muestra el modo 1 de la placa CFRP1 extendido mediante los dos métodos. Se observa que usando la extensión por extrapolación, los valores en la parte extrapolada son mayores, si bien esto no afecta al resultado.

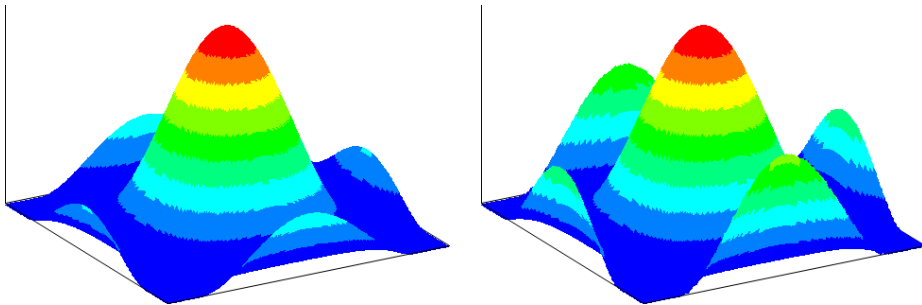


Figura 5.8: Extensión simétrica (izquierda) y mediante extrapolación (derecha) del modo 1 de la placa CFRP1.

El uso de diferentes extensiones de los modos en las dos técnicas queda justificada en la Sección 6.4.

### 5.3.4 Cambios globales en la Respuesta en Frecuencia

Para detectar daño mediante el análisis de señales transitorias se ha usado una técnica basada en los cambios sufridos por la Función de Respuesta en Frecuencia (FRF) cuando existe daño, obtenida a partir de estas señales. Técnicas similares, aunque desde otros enfoques, han sido usadas en [84, 90, 112, 119].

En primer lugar, se obtiene la FRF a partir de las señales transitorias temporales, tanto en placas sin daño como en placas con daño, de forma similar a la explicada en la Sección 3.8. Esta FRF será una señal discreta con valores en ciertas frecuencias,  $f_i$ . Una vez obtenida la FRF, se calcula el índice de daño  $D_T$ , definido como:

$$D_T = \text{distancia}(\text{FRF}_1, \text{FRF}_2, f_{\min}, f_{\max}), \quad (5.11)$$

donde  $f_{\min}$  y  $f_{\max}$  marcan el intervalo de frecuencia usado,  $\text{FRF}_1$  corresponde a la FRF de referencia (sin daño) y  $\text{FRF}_2$  corresponde a la FRF de la placa inspeccionada.

En esta Memoria se han usado tres tipos de distancias, implementadas mediante el comando de Matlab® `pdist`, tomando cada distancia el nombre correspondiente usado en Matlab®, como opción de dicho comando:

- Distancia `cityblock`

Esta distancia es una de las más simples que se pueden usar y su definición es:

$$\text{distancia} = \sum_{f_i=f_{\min}}^{f_{\max}} |\text{FRF}_1(f_i) - \text{FRF}_2(f_i)|. \quad (5.12)$$

- Distancia `euclidean`

Esta distancia es una de las más conocidas y su definición es:

$$\text{distancia} = \sqrt{\sum_{f_i=f_{\min}}^{f_{\max}} (\text{FRF}_1(f_i) - \text{FRF}_2(f_i))^2}. \quad (5.13)$$

- Distancia spearman

Esta distancia se define como la unidad menos el coeficiente de correlación de Spearman. Este coeficiente se define a su vez como el coeficiente de correlación de Pearson de las variables según su rango, en lugar de su valor, tal y como se define a continuación.

Sea  $X_i$  el conjunto de valores. Llamaremos  $x_i$  al conjunto de rangos de esos valores, definidos como la posición de cada punto, ordenando los valores de mayor a menor. En caso de valores idénticos, se les asigna un rango igual a la media de sus posiciones. Para entender esto, se usará el ejemplo descrito en la Tabla 5.6, extraído de [131].

Valores $X_i$	Posición	Rangos $x_i$
0.8	5	5
1.2	4	3.5
1.2	3	3.5
2.3	2	2
18	1	1

Tabla 5.6: Ejemplo de cálculo de los rangos a partir de los valores.

En nuestro caso los dos valores son  $\text{FRF}_1(f_i)$  y  $\text{FRF}_2(f_i)$ , y a sus respectivos rangos los llamaremos  $x_1(i)$  y  $x_2(i)$ . Una vez obtenidos dichos rangos se puede calcular la distancia haciendo uso de la fórmula habitual del coeficiente de correlación de Pearson:

$$\text{distancia} = 1 - \frac{\sum_i (x_1(i) - \bar{x}_1)(x_2(i) - \bar{x}_2)}{\sqrt{\sum_i (x_1(i) - \bar{x}_1)^2 \sum_i (x_2(i) - \bar{x}_2)^2}}, \quad (5.14)$$

donde la barra vertical indica el valor medio.

Por su propia definición, al usar los rangos en lugar de los valores de las FRFs, esta distancia es independiente de la normalización aplicada a estas.

### Detección de daño mediante el índice de daño $D_T$

En el caso de los daños modelados computacionalmente, se usó la distancia **spearman**, usando como  $\text{FRF}_1$  la de una una señal de la placa sin daño, y como  $\text{FRF}_2$

tanto las correspondientes a las señales de la placa con daño (excitadas con la misma excitación que la usada en el ensayo de  $FRF_1$ ), como la correspondiente a una señal de placa sin daño usando otra excitación diferente de similares características. El rango de frecuencias usado va de 0 Hz ( $f_{min}$ ) a 1500 Hz ( $f_{max}$ ), siendo el límite superior elegido para prevenir efectos de corte, ya que las excitaciones tienen un rango de frecuencias de 0 a 1600 Hz.

En el caso de los daños estudiados experimentalmente, se usó la distancia **spearman**, usando como  $FRF_1$  la media de dieciséis FRFs provenientes de señales de la placa sin daño, y como  $FRF_2$  las calculadas a partir de cinco señales provenientes de la placa sin daño y a partir de cinco señales para cada tipo de daño, todas ellas usando un rango de frecuencias de 200 Hz ( $f_{min}$ ) a 1500 Hz ( $f_{max}$ ), siendo de nuevo el límite superior elegido para prevenir efectos de corte, y el inferior para evitar la no linealidad en la respuesta de los piezoeléctricos.

Una vez calculado  $D_T$  para las cinco señales sin daño, se calcula su media y su dispersión, restándole la media y dividiendo por la dispersión a todos los  $D_T$  calculados para señales con daño.

Para el caso de la masa M1 colocada en la posición P1, se realizó un estudio añadiendo ruido a la señal correspondiente a la  $FRF_2$ , calculando  $D_T$  mediante las distancias **spearman**, **citiblock** y **euclidean**.

Este proceso se realiza de forma independiente para cada par sensor-actuador, en todos los casos.



## Capítulo 6

# Detección de daño mediante análisis modal

Con objeto de detectar los daños en los modos generados mediante simulación FEM y cálculos mediante el método de Ritz, descritos en la Sección 5.1, se usaron diferentes técnicas:

- *Modal Assurance Criterium*.
- Transformada Wavelet bidimensional usando información de la placa sin daño.
- Transformada Wavelet bidimensional sin usar información de la placa sin daño, mediante un procedimiento basado en el método de Ritz.

### 6.1 Análisis modal de placas dañadas

En primer lugar se muestran los resultados del análisis modal de las placas dañadas, generados mediante simulación FEM y el método de Ritz. Como ejemplo, se presentan los resultados de modos y frecuencias para la placa CFRP1 con tres daños concretos, todos ellos en la posición P3:

- Daño por agujero de 4 cm, el mayor daño estudiado computacionalmente.
- Daño por disminución en ambos módulos de Young (-10%).

- Daño por disminución en ambos módulos de Young (-1 %), el menor cambio de rigidez estudiado computacionalmente.

Por motivos de claridad, los resultados son presentados en el Apéndice A. En la Tabla A.4 se pueden observar los primeros 25 modos de vibración de la placa CFRP1 con daño por agujero de 4 cm en la posición P3, calculados mediante simulación FEM y mediante el método de Ritz, comparados con los modos de la placa sin daño calculados mediante simulación FEM, junto a sus correspondientes frecuencias y la diferencia porcentual entre ellas. Se observan diferencias apreciables a simple vista en la forma de algunos modos, como el 13, 16, 17, 24 (este último principalmente con el método de Ritz), y diferencias bastante significativas en otros, como el 18, 19, 21, 22 y 23. En las frecuencias, sin embargo, las diferencias son muy pequeñas, siendo la mayor de +0.17 % (modo 19, con el método de Ritz). Con FEM, la mayor diferencia es de -0.15 %, para el modo 23. Todas las frecuencias disminuyen su valor con este daño. Este daño es muy fácil de detectar y de localizar (si la técnica lo permite) con todas las técnicas usadas en este trabajo, como veremos más adelante.

En la Tabla A.5 se pueden observar los primeros 25 modos de vibración de la placa CFRP1 con daño por disminución en ambos módulos de Young (-10 %) en la posición P3, calculados mediante simulación FEM y mediante el método de Ritz, comparados con los modos de la placa sin daño calculados mediante simulación FEM, junto a sus correspondientes frecuencias y la diferencia porcentual entre ellas. Las únicas diferencias apreciables a simple vista son en los modos 18 y 19. En las frecuencias la mayor diferencia es de +0.06 %, para el modo 23 (menor que la diferencia FEM-Ritz en el caso sin daño). Centrándose solo en FEM, la mayor diferencia es de -0.04 %, también para el modo 23. Todas las frecuencias disminuyen su valor con este daño.

En la Tabla A.6 se pueden observar los primeros 25 modos de vibración de la placa CFRP1 con daño por disminución en ambos Módulos de Young (-1 %) en la posición P3, calculados mediante simulación FEM y mediante el método de Ritz, comparados con los modos de la placa sin daño calculados mediante simulación FEM, junto a sus correspondientes frecuencias y la diferencia porcentual entre ellas. Se puede observar que los modos son prácticamente idénticos a simple vista, mientras en las frecuencias, centrándose solo en FEM, los cambios son menores de

dos decimales porcentuales, por lo que se pueden considerar idénticas.

De estas tres Tablas podemos concluir que la detección del daño mediante la comparación de las frecuencias es muy difícil o imposible incluso con daños grandes. En el caso de los modos tampoco será fácil detectar el daño, salvo si este es muy grande, y aun detectándose daño mediante cambios en la forma de los modos, no nos da pistas claras sobre su localización.

## 6.2 Detección de daño mediante *Modal Assurance Criterium* (MAC)

La primera técnica usada para detectar daño mediante análisis modal fue el *Modal Assurance Criterium* (MAC), cuyos fundamentos se explican en la Sección 5.3.1. Los resultados se presentan en forma de gráficas, donde cada valor MAC (comprendido siempre entre cero y uno) se representa por un color según la escala de la Figura 6.1. Si la placa inspeccionada no presenta daño, los valores deben ser siempre uno para la diagonal principal (color rojo) y cero para el resto de valores (color azul oscuro). Estos dos colores no se visualizan bien en la escala de la Figura 6.1, ya que el margen de valores para esos colores es muy pequeño:  $10^{-5}$  desde uno y cero, respectivamente. Es decir, el error para un valor MAC sin daño (uno para la diagonal principal, cero para el resto de valores) será de  $10^{-5}$ .

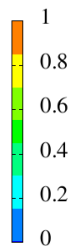


Figura 6.1: Escala de colores usada para representar los valores MAC.

Puesto que para generar los modos se usaron dos métodos diferentes, en primer lugar es necesario comprobar que los dos métodos dan resultados coherentes. Para ello, se calcularon los valores MAC para los 25 primeros modos de la placa Aluminio y CFRP1 sin daño generados mediante el método de Ritz, calculados respecto

a los modos de las respectivas placas sin daño generados mediante simulación FEM (Figura 6.2), observándose que los valores corresponden completamente a los esperados en ausencia de daño, es decir, los resultados para placas sin daño con ambos métodos son coherentes.

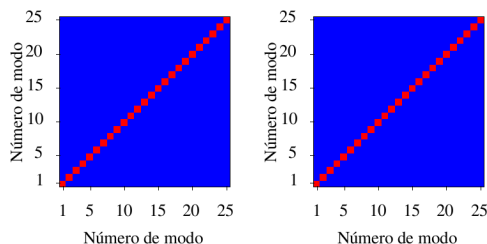


Figura 6.2: Valores MAC para los 25 primeros modos de la placa Aluminio (izquierda) y CFRP1 (derecha) sin daño generados mediante el método de Ritz, calculados respecto a los respectivos modos de la placa sin daño generados mediante simulación FEM.

A continuación se exponen los resultados por separado para cada placa con los diferentes daños descritos en la Sección 5.1, para las dos técnicas de cálculo de los modos.

### 6.2.1 Placa Aluminio

#### Modos calculados mediante simulación FEM

En la Figura 6.3 se pueden observar los valores MAC para los 25 primeros modos de la placa Aluminio con daño por agujero cuadrado de 2 cm centrado en las posiciones P1, P2 y P3, calculados respecto a los modos de la placa sin daño, siendo todos los modos generados mediante simulación FEM. Casi todos los valores diagonales presentan un valor distinto de uno (sobre todo en las posiciones P1 y P3), y algunos cercanos a la diagonal presentan un valor distinto de cero (sobre todo en las posiciones P1 y P2), por lo que se puede asegurar que se detecta daño.

En la Figura 6.4 se pueden observar los valores MAC para los 25 primeros modos de la placa Aluminio con daño por agujero cuadrado de 4 cm centrado en las posiciones P1, P2 y P3, calculados respecto a los modos de la placa sin daño. Casi todos los valores diagonales presentan un valor distinto de uno. Como es lógico,

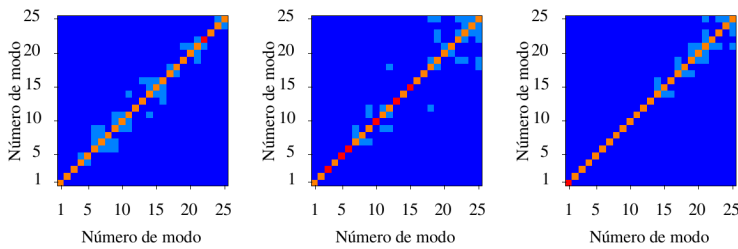


Figura 6.3: Valores MAC para los 25 primeros modos de la placa Aluminio con daño por agujero cuadrado de 2 cm centrado en las posiciones P1 (izquierda), P2 (centro) y P3 (derecha), calculados respecto a los modos de la placa sin daño. Modos generados mediante simulación FEM.

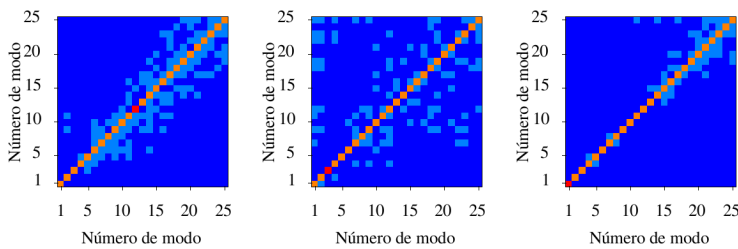


Figura 6.4: Valores MAC para los 25 primeros modos de la placa Aluminio con daño por agujero cuadrado de 4 cm centrado en las posiciones P1 (izquierda), P2 (centro) y P3 (derecha), calculados respecto a los modos de la placa sin daño. Modos generados mediante simulación FEM.

siendo este daño mayor que el anterior, se puede asegurar que se detecta daño.

En las Figuras 6.5, 6.6 y 6.7 se pueden observar los valores MAC para los 25 primeros modos de la placa Aluminio con daño por aumento en la densidad (+1%, +5% y +10%, respectivamente) centrado en las posiciones P1, P2 y P3, calculados respecto a los modos de la placa sin daño. En el primer caso (+1%), el daño no es detectado en la posición P2, y apenas se detecta en las otras dos posiciones. En los otros dos casos sí se detecta el daño más fácilmente, si bien en las posiciones P2 y P3 este se manifiesta principalmente en los valores MAC correspondientes a modos altos.

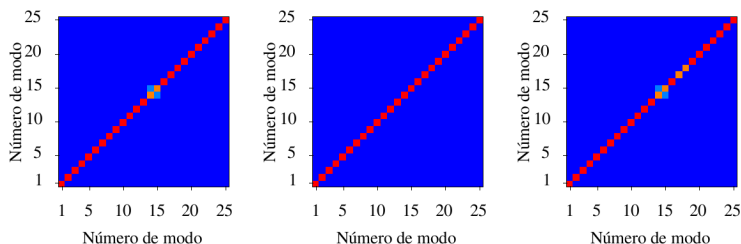


Figura 6.5: Valores MAC para los 25 primeros modos de la placa Aluminio con daño por aumento en la densidad (+1 %) en un área cuadrada de 4 cm centrada en las posiciones P1 (izquierda), P2 (centro) y P3 (derecha), calculados respecto a los modos de la placa sin daño. Modos generados mediante simulación FEM.

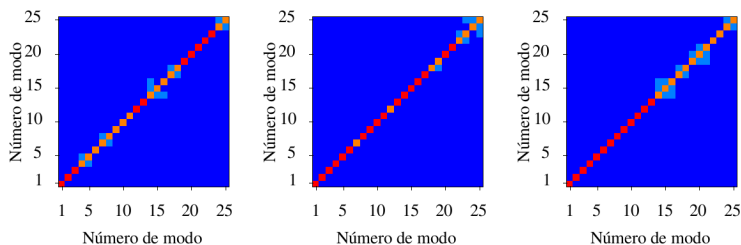


Figura 6.6: Valores MAC para los 25 primeros modos de la placa Aluminio con daño por aumento en la densidad (+5 %) en un área cuadrada de 4 cm centrada en las posiciones P1 (izquierda), P2 (centro) y P3 (derecha), calculados respecto a los modos de la placa sin daño. Modos generados mediante simulación FEM.

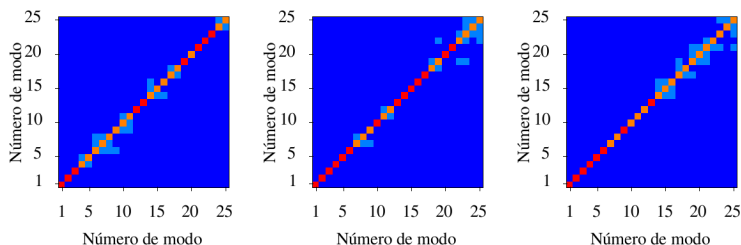


Figura 6.7: Valores MAC para los 25 primeros modos de la placa Aluminio con daño por aumento en la densidad (+10 %) en un área cuadrada de 4 cm centrada en las posiciones P1 (izquierda), P2 (centro) y P3 (derecha), calculados respecto a los modos de la placa sin daño. Modos generados mediante simulación FEM.

## 6.2. Detección de daño mediante Modal Assurance Criterium (MAC)

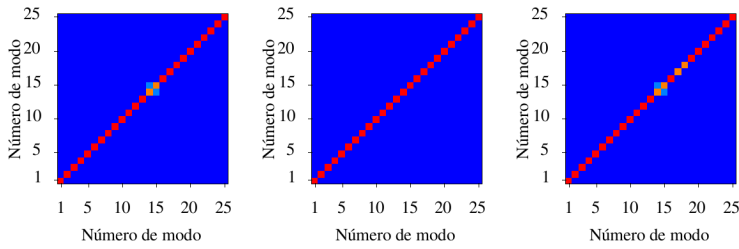


Figura 6.8: Valores MAC para los 25 primeros modos de la placa Aluminio con daño por disminución en la densidad (-1 %) en un área cuadrada de 4 cm centrada en las posiciones P1 (izquierda), P2 (centro) y P3 (derecha), calculados respecto a la placa sin daño. Modos generados mediante simulación FEM.

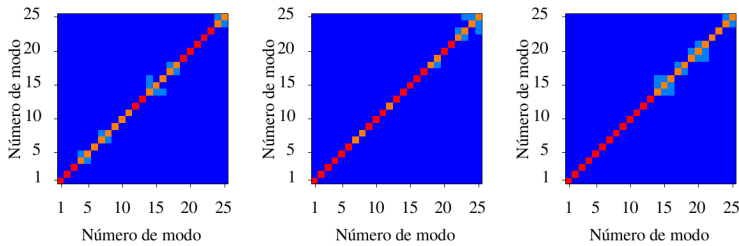


Figura 6.9: Valores MAC para los 25 primeros modos de la placa Aluminio con daño por disminución en la densidad (-5 %) en un área cuadrada de 4 cm centrada en las posiciones P1 (izquierda), P2 (centro) y P3 (derecha), calculados respecto a la placa sin daño. Modos generados mediante simulación FEM.

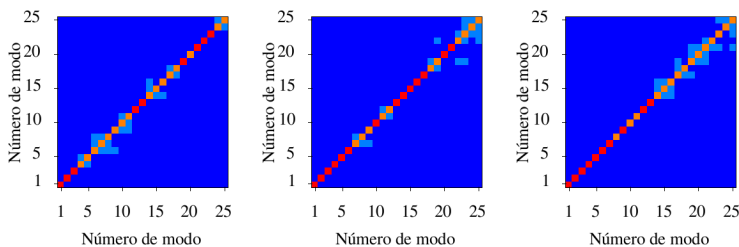


Figura 6.10: Valores MAC para los 25 primeros modos de la placa Aluminio con daño por disminución en la densidad (-10 %) en un área cuadrada de 4 cm centrada en las posiciones P1 (izquierda), P2 (centro) y P3 (derecha), calculados respecto a la placa sin daño. Modos generados mediante simulación FEM.

En las Figuras 6.8, 6.9 y 6.10 se pueden observar los valores MAC para los 25 primeros modos de la placa Aluminio con daño por disminución en la densidad (-1 %, -5 % y -10 %, respectivamente) centrado en las posiciones P1, P2 y P3, calculados respecto a los modos de la placa sin daño, siendo todos los modos generados mediante simulación FEM. Los resultados son idénticos a los de las Figuras 6.5, 6.6 y 6.7, salvo un par de valores en el tercer caso y la posición P3. Esta simetría está presente para las dos placas y los dos métodos de generación de modos usados, por lo que de ahora en adelante solo se mostrarán los resultados de disminución de densidad.

Por último, en las Figuras 6.11, 6.12 y 6.13 se pueden observar los valores MAC para los 25 primeros modos de la placa Aluminio con daño por disminución en el módulo de Young (-1 %, -5 % y -10 %, respectivamente) centrado en las posiciones P1, P2 y P3, calculados respecto a los modos de la placa sin daño. En el primer caso (-1 %) el daño solo se detecta de forma muy somera en la posición P3, y un poco más en las otras dos posiciones, pero siempre con pocos valores MAC diferentes de cero y uno.

### **Modos calculados mediante el método de Ritz**

En las Figuras 6.14 y 6.15 se pueden observar los valores MAC para los 25 primeros modos de la placa Aluminio con daño por agujero cuadrado de 2 y 4 cm (respectivamente) centrado en las posiciones P1, P2 y P3, calculados respecto a los modos de la placa sin daño, siendo todos los modos generados mediante el método de Ritz. La detección de daño resulta igual de clara que para los modos generados mediante simulación FEM, pero los valores MAC presentan bastante diferencias.

En las Figuras 6.16-6.21 se pueden observar los valores MAC para los 25 primeros modos de la placa Aluminio con daño por disminución en la densidad y en el módulo de Young (-1 %, -5 % y -10 %) centrado en las posiciones P1, P2 y P3, calculados respecto a los modos de la placa sin daño. En estos casos las diferencias entre estas Figuras y sus equivalentes cuando los modos son generados mediante simulación FEM son mínimas (o inexistentes en muchos casos). Esta diferencia entre los daños tipo agujero y el resto puede deberse a la forma en la que se realizan los cálculos mediante el método de Ritz, ya que si bien a la hora de realizar los cálculos se le ha restado la energía correspondiente a la zona donde estaba el agujero, las



## 6.2. Detección de daño mediante Modal Assurance Criterium (MAC)

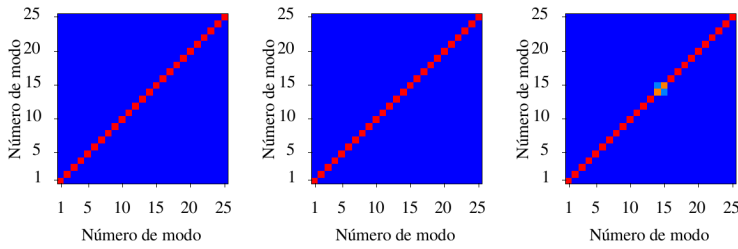


Figura 6.11: Valores MAC para los 25 primeros modos de la placa Aluminio con daño por disminución en el módulo de Young (-1 %) en un área cuadrada de 4 cm centrada en las posiciones P1 (izquierda), P2 (centro) y P3 (derecha), calculados respecto a la placa sin daño. Modos generados mediante simulación FEM.

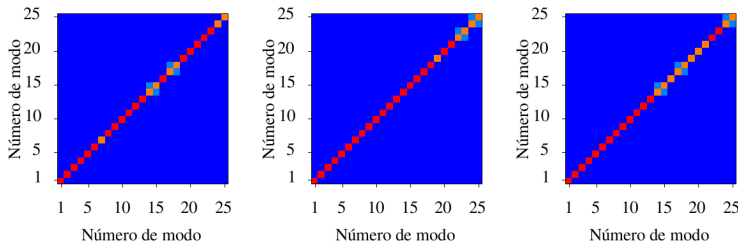


Figura 6.12: Valores MAC para los 25 primeros modos de la placa Aluminio con daño por disminución en el módulo de Young (-5 %) en un área cuadrada de 4 cm centrada en las posiciones P1 (izquierda), P2 (centro) y P3 (derecha), calculados respecto a la placa sin daño. Modos generados mediante simulación FEM.

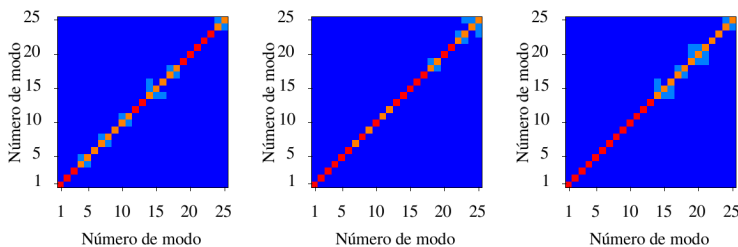


Figura 6.13: Valores MAC para los 25 primeros modos de la placa Aluminio con daño por disminución en el módulo de Young (-10 %) en un área cuadrada de 4 cm centrada en las posiciones P1 (izquierda), P2 (centro) y P3 (derecha), calculados respecto a la placa sin daño. Modos generados mediante simulación FEM.

funciones usadas son totalmente continuas, por lo que el modelo no es físicamente consistente en el caso de un agujero. En el resto de daños no se tienen en cuenta las condiciones de continuidad entre las diferentes zonas, a pesar de lo cual los resultados de los valores MAC son muy parecidos a los obtenidos con los modos generados mediante simulación FEM.

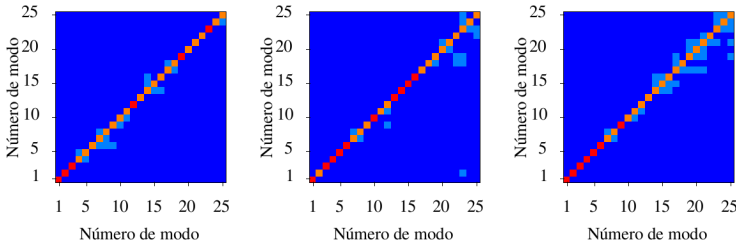


Figura 6.14: Valores MAC para los 25 primeros modos de la placa Aluminio con daño por agujero cuadrado de 2 cm centrado en las posiciones P1 (izquierda), P2 (centro) y P3 (derecha), calculados respecto a los modos de la placa sin daño. Modos generados mediante el método de Ritz.

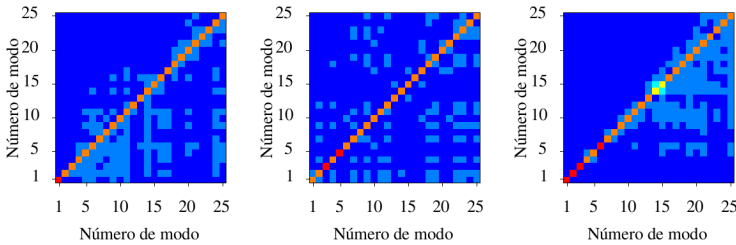


Figura 6.15: Valores MAC para los 25 primeros modos de la placa Aluminio con daño por agujero cuadrado de 4 cm centrado en las posiciones P1 (izquierda), P2 (centro) y P3 (derecha), calculados respecto a los modos de la placa sin daño. Modos generados mediante el método de Ritz.

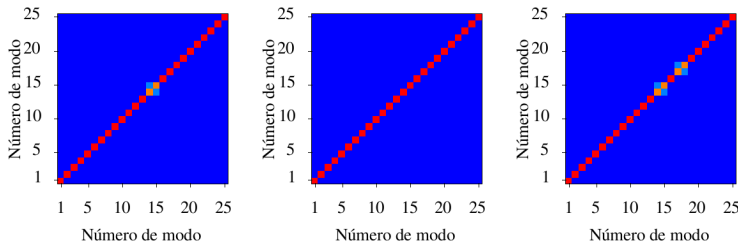


Figura 6.16: Valores MAC para los 25 primeros modos de la placa Aluminio con daño por disminución en la densidad (-1%) en un área cuadrada de 4 cm centrada en las posiciones P1 (izquierda), P2 (centro) y P3 (derecha), calculados respecto a la placa sin daño. Modos generados mediante el método de Ritz.

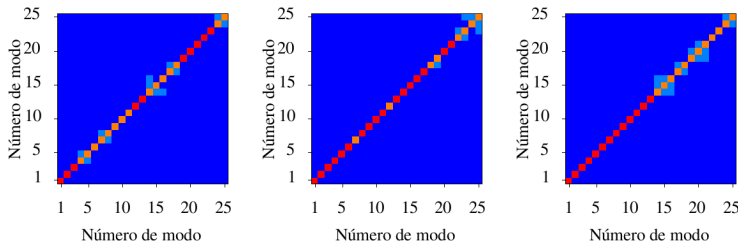


Figura 6.17: Valores MAC para los 25 primeros modos de la placa Aluminio con daño por disminución en la densidad (-5%) en un área cuadrada de 4 cm centrada en las posiciones P1 (izquierda), P2 (centro) y P3 (derecha), calculados respecto a la placa sin daño. Modos generados mediante el método de Ritz.

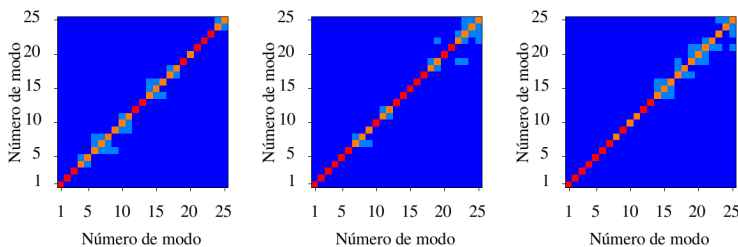


Figura 6.18: Valores MAC para los 25 primeros modos de la placa Aluminio con daño por disminución en la densidad (-10%) en un área cuadrada de 4 cm centrada en las posiciones P1 (izquierda), P2 (centro) y P3 (derecha), calculados respecto a la placa sin daño. Modos generados mediante el método de Ritz.

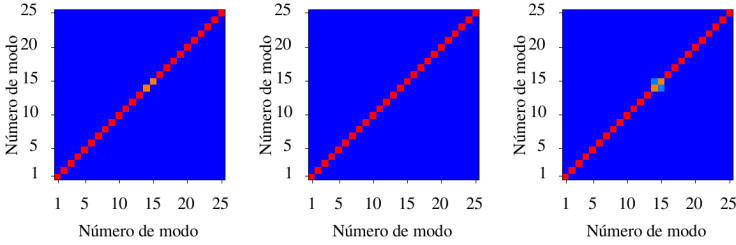


Figura 6.19: Valores MAC para los 25 primeros modos de la placa Aluminio con daño por disminución en el módulo de Young (-1 %) en un área cuadrada de 4 cm centrada en las posiciones P1 (izquierda), P2 (centro) y P3 (derecha), calculados respecto a la placa sin daño. Modos generados mediante el método de Ritz.

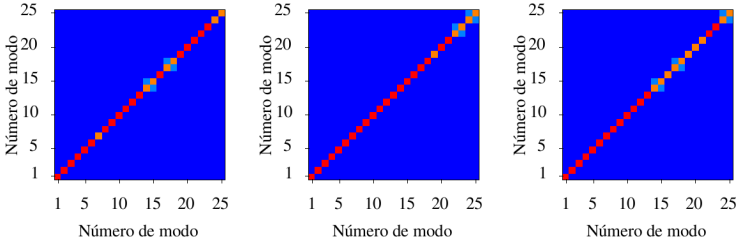


Figura 6.20: Valores MAC para los 25 primeros modos de la placa Aluminio con daño por disminución en el módulo de Young (-5 %) en un área cuadrada de 4 cm centrada en las posiciones P1 (izquierda), P2 (centro) y P3 (derecha), calculados respecto a la placa sin daño. Modos generados mediante el método de Ritz.

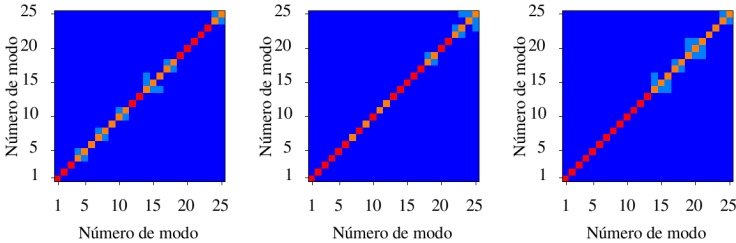


Figura 6.21: Valores MAC para los 25 primeros modos de la placa Aluminio con daño por disminución en el módulo de Young (-10 %) en un área cuadrada de 4 cm centrada en las posiciones P1 (izquierda), P2 (centro) y P3 (derecha), calculados respecto a la placa sin daño. Modos generados mediante el método de Ritz.

### 6.2.2 Placa CFRP1

#### Modos calculados mediante simulación FEM

Los resultados de los valores MAC para la placa CFRP1 usando modos generados mediante simulación FEM se pueden ver en las Figuras 6.22-6.29. Respecto a las resultados con el mismo tipo de daño para la placa Aluminio, se puede observar, como norma general, que los daños afectan menos a los modos bajos y más a los modos altos. También se puede reseñar que solo hay un caso donde no se detecte daño en ningún valor MAC (disminución del -1% en ambos módulos de Young, posición P1).

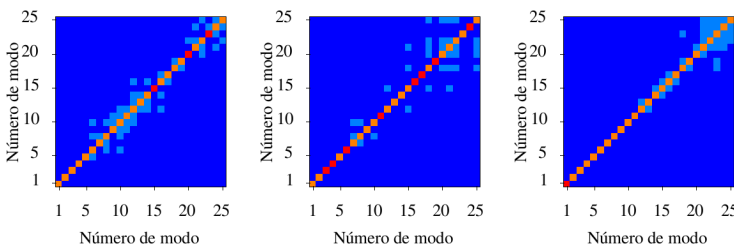


Figura 6.22: Valores MAC para los 25 primeros modos de la placa CFRP1 con daño por agujero cuadrado de 2 cm centrado en las posiciones P1 (izquierda), P2 (centro) y P3 (derecha), calculados respecto a los modos de la placa sin daño. Modos generados mediante simulación FEM.

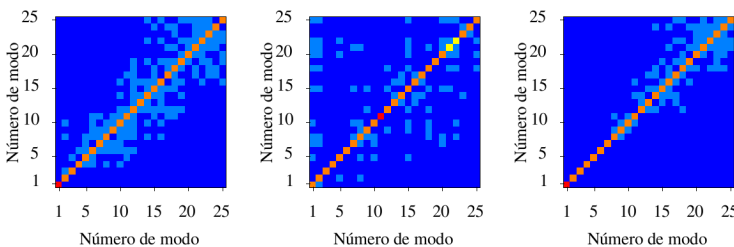


Figura 6.23: Valores MAC para los 25 primeros modos de la placa CFRP1 con daño por agujero cuadrado de 4 cm centrado en las posiciones P1 (izquierda), P2 (centro) y P3 (derecha), calculados respecto a los modos de la placa sin daño. Modos generados mediante simulación FEM.

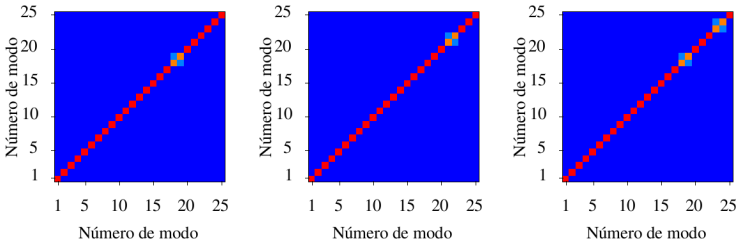


Figura 6.24: Valores MAC para los 25 primeros modos de la placa CFRP1 con daño por disminución en la densidad (-1%) en un área cuadrada de 4 cm centrada en las posiciones P1 (izquierda), P2 (centro) y P3 (derecha), calculados respecto a los modos de la placa sin daño. Modos generados mediante simulación FEM.

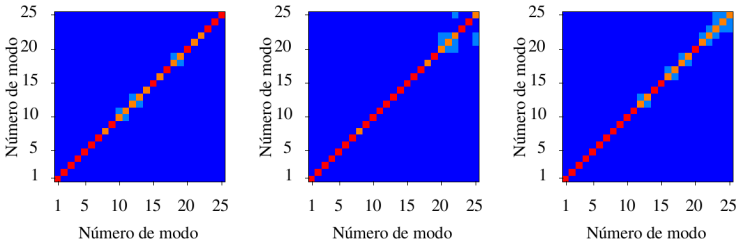


Figura 6.25: Valores MAC para los 25 primeros modos de la placa CFRP1 con daño por disminución en la densidad (-5%) en un área cuadrada de 4 cm centrada en las posiciones P1 (izquierda), P2 (centro) y P3 (derecha), calculados respecto a los modos de la placa sin daño. Modos generados mediante simulación FEM.

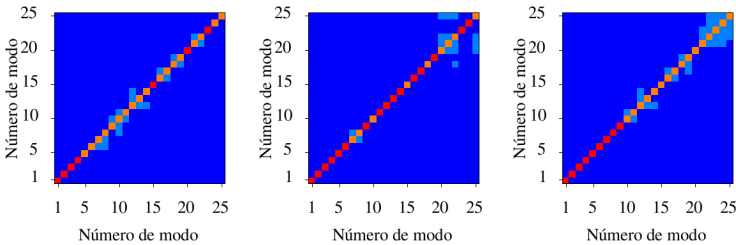


Figura 6.26: Valores MAC para los 25 primeros modos de la placa CFRP1 con daño por disminución en la densidad (-10%) en un área cuadrada de 4 cm centrada en las posiciones P1 (izquierda), P2 (centro) y P3 (derecha), calculados respecto a los modos de la placa sin daño. Modos generados mediante simulación FEM.

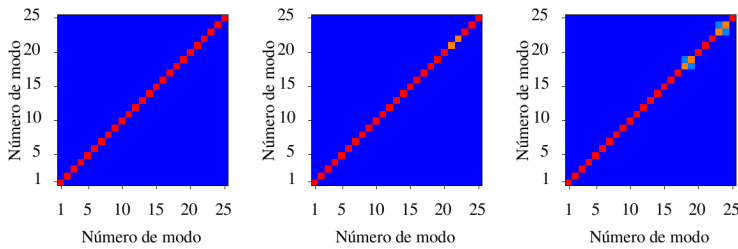


Figura 6.27: Valores MAC para los 25 primeros modos de la placa CFRP1 con daño por disminución en ambos módulos de Young (-1 %) en un área cuadrada de 4 cm centrada en las posiciones P1 (izquierda), P2 (centro) y P3 (derecha), calculados respecto a los modos de la placa sin daño. Modos generados mediante simulación FEM.

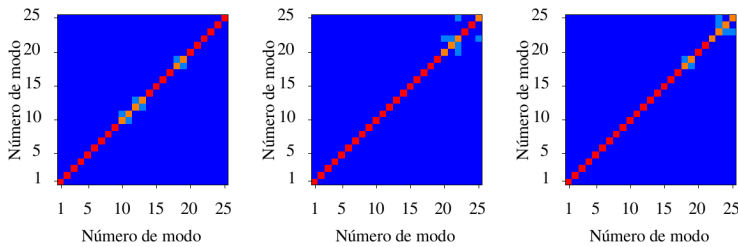


Figura 6.28: Valores MAC para los 25 primeros modos de la placa CFRP1 con daño por disminución en ambos módulos de Young (-5 %) en un área cuadrada de 4 cm centrada en las posiciones P1 (izquierda), P2 (centro) y P3 (derecha), calculados respecto a los modos de la placa sin daño. Modos generados mediante simulación FEM.

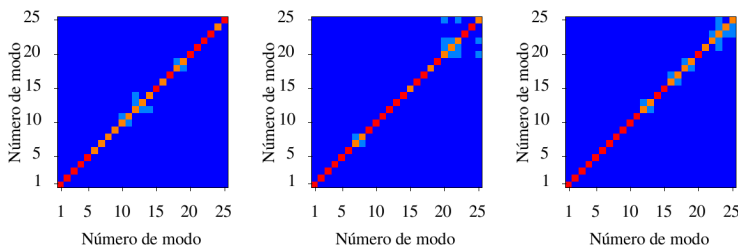


Figura 6.29: Valores MAC para los 25 primeros modos de la placa CFRP1 con daño por disminución en ambos módulos de Young (-10 %) en un área cuadrada de 4 cm centrada en las posiciones P1 (izquierda), P2 (centro) y P3 (derecha), calculados respecto a los modos de la placa sin daño. Modos generados mediante simulación FEM.

### Modos calculados mediante el método de Ritz

Al igual que con la placa Aluminio, si se usan los modos generados mediante el método de Ritz, los valores MAC son diferentes cuando el daño es tipo agujero, y muy parecidos o iguales con los otros tipos de daño. Por claridad se omiten las Figuras con los resultados de este apartado.

## 6.3 Detección de daño mediante Transformada Wavelet bidimensional usando información sobre la placa sin daño

La segunda técnica usada para detectar daño mediante análisis modal consistió en usar el índice de daño  $D(x, y)$  definido en la expresión (5.9), basado en la Transformada Wavelet bidimensional, cuyos fundamentos se explican en la Sección 5.3.2. Dicho índice de daño depende de la posición sobre la placa y está definido para cada modo, por lo que para cada placa, modo, tipo de daño y posición tendremos una gráfica diferente. Estas gráficas fueron representadas en curvas de nivel, haciendo uso de la escala de colores representada en la Figura 6.30 (donde 0 es el valor mínimo y 1 es el máximo).

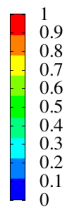


Figura 6.30: Escala de colores usada para representar el índice de daño  $D$ .

### 6.3.1 Criterio de detección de daño

Por simplicidad, los resultados se presentan en diferentes Tablas, según un código de colores que indica el grado de detección de daño:



El texto en color rojo indica que no se ha podido detectar daño. En la Figura 6.31 se pueden observar varios ejemplos de estos casos, que obviamente son fallos de la técnica.

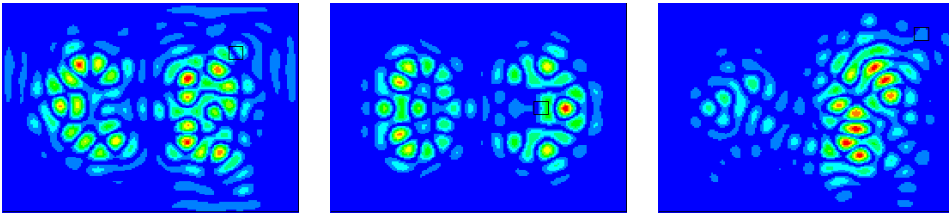


Figura 6.31: Ejemplo de figuras del índice de daño  $D$  en las que no se detectado el daño (cuya posición está marcada con una línea negra) con claridad (rojo).

El texto en color verde indica que se ha podido detectar y localizar el daño con claridad. En la Figura 6.32 se pueden observar varios ejemplos de estos casos.

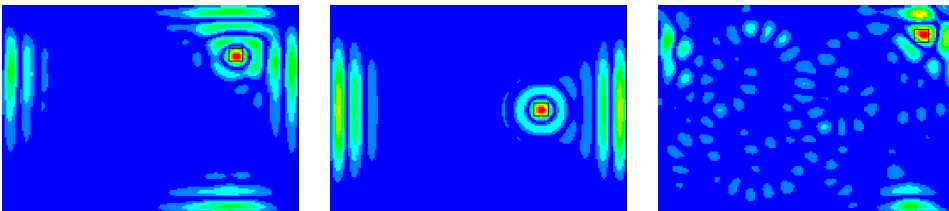


Figura 6.32: Ejemplo de figuras del índice de daño  $D$  en las que se ha detectado y localizado el daño (cuya posición está marcada con una línea negra) con claridad (verde).

El texto en color azul indica que se ha podido detectar el daño, si bien la localización queda menos clara, al aparecer valores altos del índice  $D$  alrededor de la posición del daño, pero no en la posición del daño en sí. En la Figura 6.33 se pueden observar varios ejemplos de estos casos.

El texto en color naranja indica que se ha podido detectar y localizar el daño, aunque otros puntos de la placa presentan también valores altos de  $D$ , lo que puede llevar a confusión (falsos positivos) o a la no detección de daño en condiciones menos idóneas (por ejemplo con ruido experimental). El criterio elegido ha sido que haya puntos en color naranja o rojo (según la escala de la Figura 6.30) lejos de la posición

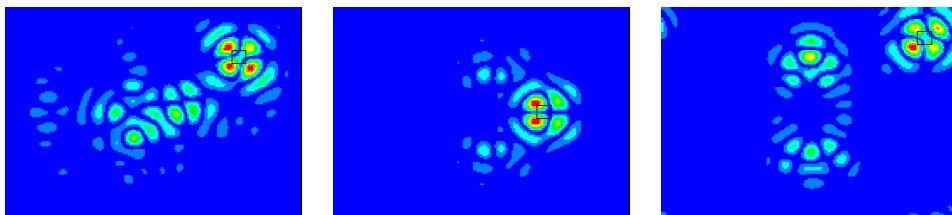


Figura 6.33: Ejemplo de figuras del índice de daño  $D$  en las que se ha detectado el daño (cuya posición está marcada con una línea negra), pero su localización queda menos clara (azul).

del daño (y no incluidos en el punto anterior). En la Figura 6.34 se pueden observar varios ejemplos de estos casos.

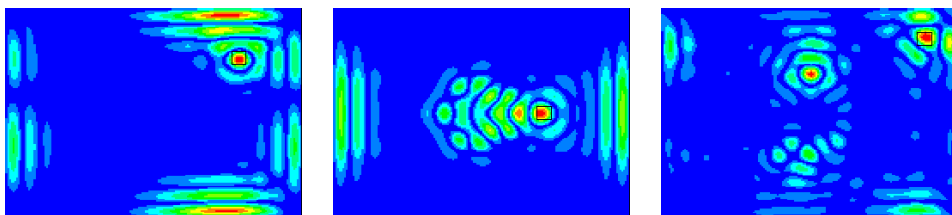


Figura 6.34: Ejemplo de figuras del índice de daño  $D$  en las que se ha detectado y localizado el daño (cuya posición está marcada con una línea negra), aunque otros puntos de la placa también presentan valores altos de  $D$  (naranja).

### 6.3.2 Resultados

La Tabla 6.1 sintetiza los resultados para los tres primeros modos de la placa Aluminio, siendo los modos calculados mediante simulación FEM. Se observa que los daños por agujero y por disminución en el módulo de Young son siempre detectados, aunque, en algunos casos, con ciertas incertidumbres en su localización. Sin embargo, los daños por aumento y disminución de densidad son más difíciles de detectar, siendo tanto la posición del daño como el modo usado un factor determinante. Así, el modo 2 es el que nos proporciona una mejor localización para las posiciones P1 y P2, mientras el modo 3 funciona mejor para detectar daño en la posición P3. Se observa además bastante simetría entre aumento y disminución de

6.3. Detección de daño mediante Transformada Wavelet bidimensional usando información sobre la placa sin daño

densidad.

		Placa Aluminio (FEM)								
		Modo 1			Modo 2			Modo 3		
Agujero	P1	2 cm	4 cm		2 cm	4 cm		2 cm	4 cm	
	P2	2 cm	4 cm		2 cm	4 cm		2 cm	4 cm	
	P3	2 cm	4 cm		2 cm	4 cm		2 cm	4 cm	
Aumento en la densidad	P1	+1 %	+5 %	+10 %	+1 %	+5 %	+10 %	+1 %	+5 %	+10 %
	P2	+1 %	+5 %	+10 %	+1 %	+5 %	+10 %	+1 %	+5 %	+10 %
	P3	+1 %	+5 %	+10 %	+1 %	+5 %	+10 %	+1 %	+5 %	+10 %
Disminución en la densidad	P1	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %
	P2	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %
	P3	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %
Disminución en el módulo de Young	P1	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %
	P2	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %
	P3	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %

Tabla 6.1: Resultados de detección de daño para los tres primeros modos de la placa Aluminio usando el índice de daño  $D$ . Modos calculados mediante simulación FEM para diferentes tipos de daño en las posiciones P1, P2 y P3.

La Tabla 6.2 sintetiza los resultados para los tres primeros modos de la placa Aluminio, siendo los modos calculados mediante el método de Ritz. En este caso todos los daños son detectados, presentando problemas de localización en algunos casos de agujero y disminución del módulo de Young, y de posibles falsos positivos en algunos casos de aumento y disminución de densidad. Como ya sucedía en el caso anterior, cuando un daño presenta problemas de localización, estos persisten al aumentar la magnitud, lo que implica que el problema está asociado a la forma de ese modo en esa posición concreta del daño. El hecho de que los daños sean, en general, más fácilmente detectables cuando los modos son calculados con el método de Ritz que cuando son calculados con simulación FEM, nos lleva a pensar que al usar el método de Ritz se calculan unos modos con un daño mayor del esperado. Esto puede ser debido a que el método, en la forma aquí implementada, no respeta las condiciones de continuidad entre la zona con daño y el resto de la placa.

La Tabla 6.3 sintetiza los resultados para los tres primeros modos de la placa CFRP1, siendo los modos calculados mediante simulación FEM. En relación a los resultados equivalentes de la placa Aluminio, observamos que los daños son, en general, más difíciles de detectar, ya que obtenemos fallos en un par de casos más

		Placa Aluminio (Ritz)								
		Modo 1			Modo 2			Modo 3		
Agujero	P1	2 cm	4 cm	2 cm	4 cm	2 cm	4 cm	2 cm	4 cm	
	P2	2 cm	4 cm	2 cm	4 cm	2 cm	4 cm	2 cm	4 cm	
	P3	2 cm	4 cm	2 cm	4 cm	2 cm	4 cm	2 cm	4 cm	
Aumento en la densidad	P1	+1%	+5%	+10%	+1%	+5%	+10%	+1%	+5%	+10%
	P2	+1%	+5%	+10%	+1%	+5%	+10%	+1%	+5%	+10%
	P3	+1%	+5%	+10%	+1%	+5%	+10%	+1%	+5%	+10%
Disminución en la densidad	P1	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%
	P2	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%
	P3	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%
Disminución en el módulo de Young	P1	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%
	P2	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%
	P3	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%

Tabla 6.2: Resultados de detección de daño para los tres primeros modos de la placa Aluminio usando el índice de daño  $D$ . Modos calculados mediante el método de Ritz para diferentes tipos de daño en las posiciones P1, P2 y P3.

que antes. En general hay bastante similitud con la placa Aluminio.

		Placa CFRP1 (FEM)								
		Modo 1			Modo 2			Modo 3		
Agujero	P1	2 cm	4 cm	2 cm	4 cm	2 cm	4 cm	2 cm	4 cm	
	P2	2 cm	4 cm	2 cm	4 cm	2 cm	4 cm	2 cm	4 cm	
	P3	2 cm	4 cm	2 cm	4 cm	2 cm	4 cm	2 cm	4 cm	
Aumento en la densidad	P1	+1%	+5%	+10%	+1%	+5%	+10%	+1%	+5%	+10%
	P2	+1%	+5%	+10%	+1%	+5%	+10%	+1%	+5%	+10%
	P3	+1%	+5%	+10%	+1%	+5%	+10%	+1%	+5%	+10%
Disminución en la densidad	P1	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%
	P2	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%
	P3	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%
Disminución en ambos módulos de Young	P1	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%
	P2	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%
	P3	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%

Tabla 6.3: Resultados de detección de daño para los tres primeros modos de la placa CFRP1 usando el índice de daño  $D$ . Modos calculados mediante simulación FEM para diferentes tipos de daño en las posiciones P1, P2 y P3.

6.3. Detección de daño mediante Transformada Wavelet bidimensional usando información sobre la placa sin daño

---

Finalmente, la Tabla 6.4 sintetiza los resultados para los tres primeros modos de la placa CFRP1, siendo los modos calculados mediante el método de Ritz. En este caso obtenemos un solo resultado negativo, siendo la localización mejor que para la placa Aluminio. Estos resultados, comparados con los de la Tabla 6.3, refuerzan la hipótesis de que con el método de Ritz se calculan unos modos con un daño mayor del esperado, posiblemente por no respetar las condiciones de continuidad entre la zona con daño y el resto de la placa.

		Placa CFRP1 (Ritz)								
		Modo 1			Modo 2			Modo 3		
Agujero	P1	2 cm	4 cm		2 cm	4 cm		2 cm	4 cm	
	P2	2 cm	4 cm		2 cm	4 cm		2 cm	4 cm	
	P3	2 cm	4 cm		2 cm	4 cm		2 cm	4 cm	
Aumento en la densidad	P1	+1%	+5%	+10%	+1%	+5%	+10%	+1%	+5%	+10%
	P2	+1%	+5%	+10%	+1%	+5%	+10%	+1%	+5%	+10%
	P3	+1%	+5%	+10%	+1%	+5%	+10%	+1%	+5%	+10%
Disminución en la densidad	P1	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%
	P2	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%
	P3	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%
Disminución en ambos módulos de Young	P1	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%
	P2	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%
	P3	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%	-1%	-5%	-10%

Tabla 6.4: Resultados de detección de daño para los tres primeros modos de la placa CFRP1 usando el índice de daño  $D$ . Modos calculados mediante el método de Ritz para diferentes tipos de daño en las posiciones P1, P2 y P3.

Como ejemplos, las Figuras 6.35 y 6.36 muestran los resultados del índice de daño  $D$  para los modos 1 y 3 de la placa CFRP1, con daño por disminución en ambos módulos de Young (-1%), centrado en las posiciones P1, P2 y P3, siendo los modos calculados mediante simulación FEM y el método de Ritz, respectivamente.

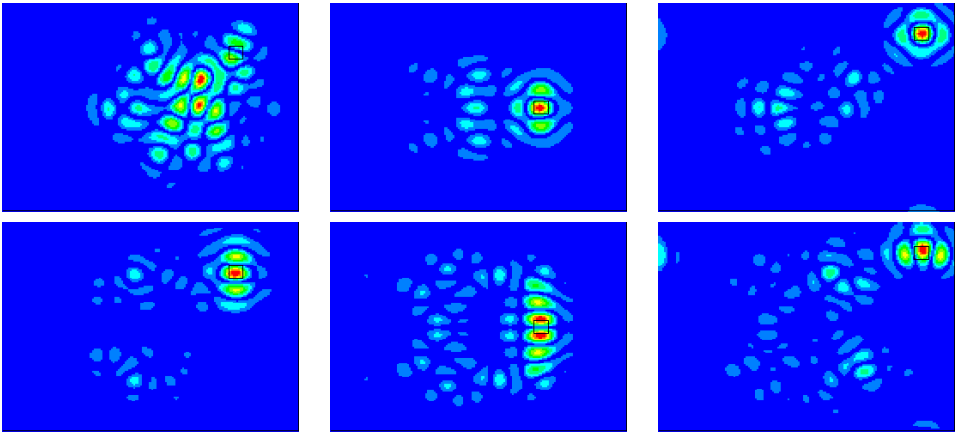


Figura 6.35: Índice de daño  $D$  para los modos 1 (arriba) y 3 (abajo) de la placa CFRP1, con daño por disminución en ambos módulos de Young (-1%), centrado en las posiciones P1 (izquierda), P2 (centro) y P3 (derecha). Modos calculados mediante simulación FEM.

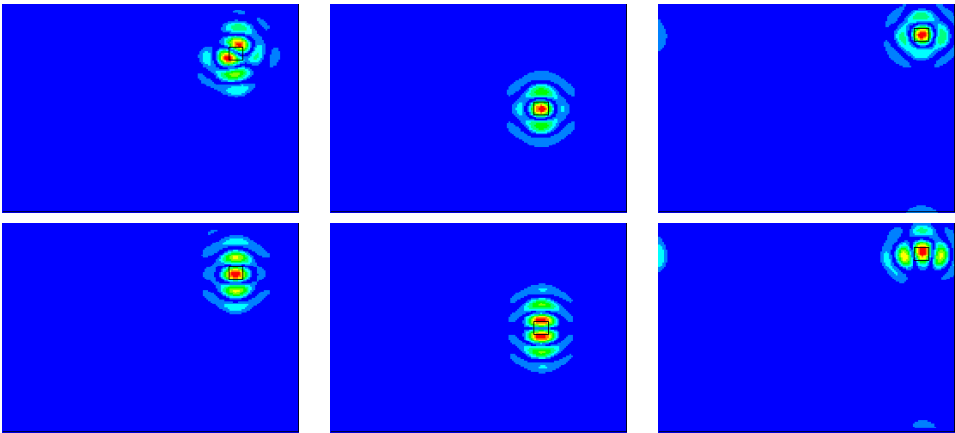


Figura 6.36: Índice de daño  $D$  para los modos 1 (arriba) y 3 (abajo) de la placa CFRP1, con daño por disminución en ambos módulos de Young (-1%), centrado en las posiciones P1 (izquierda), P2 (centro) y P3 (derecha). Modos calculados mediante el método de Ritz.

## 6.4 Detección de daño mediante Transformada Wavelet bidimensional sin usar información sobre la placa sin daño

La tercera técnica usada para detectar daño mediante análisis modal consistió en usar el índice de daño  $D_R(x, y)$  definido en la expresión (5.10), basado en el método de Ritz y la Transformada Wavelet continua bidimensional, cuyos fundamentos se explican en la Sección 5.3.3. Dicho índice de daño depende de la posición sobre la placa y está definido para cada modo, por lo que para cada placa, modo, tipo de daño y posición se tiene una gráfica diferente. Estas gráficas fueron representadas en curvas de nivel, haciendo uso de la escala de colores representada en la Figura 6.30 (donde 0 es el valor mínimo y 1 es el máximo).

### 6.4.1 Extensión de los modos

En primer lugar se justifica la extensión de los modos usada en esta técnica, ya que se ha utilizado una extensión diferente a la de la técnica anterior. En la Figura 6.37 se puede observar el índice  $D$  calculado para los tres primeros modos de la placa CFRP1 sin daño, usando como modos sin daño los calculados mediante simulación FEM, y como modos a inspeccionar, los calculados mediante el método de Ritz con  $M = N = 2$ , realizando tanto la extensión simétrica como la descrita en la Sección 5.3.3. Junto a cada gráfica se presenta el valor máximo de  $D$ . Se puede observar que, para los modos 2 y 3, el valor máximo es mucho más grande en el caso de la extensión simétrica, lo que podría imposibilitar la detección de daño. Esto puede ser debido a que los modos calculados mediante el método de Ritz usando pocos términos en el sumatorio (2.66), son ligeramente diferentes cerca de los bordes de la placa. Al eliminar los nodos correspondientes a los bordes de la placa y extrapolar la señal línea a línea por cada lado, este efecto se suaviza, si bien todo el ruido queda concentrado cerca de los bordes.

Puesto que en la técnica expuesta en la Sección 5.3.3, los modos dañados ( $M_d$ ) se obtienen mediante simulación FEM, y los modos aproximados ( $M_a$ ) se obtienen de un desarrollo de Ritz con  $M = N = 2$ , queda justificado el uso de la extensión de los modos descrita en la Sección 5.3.3.

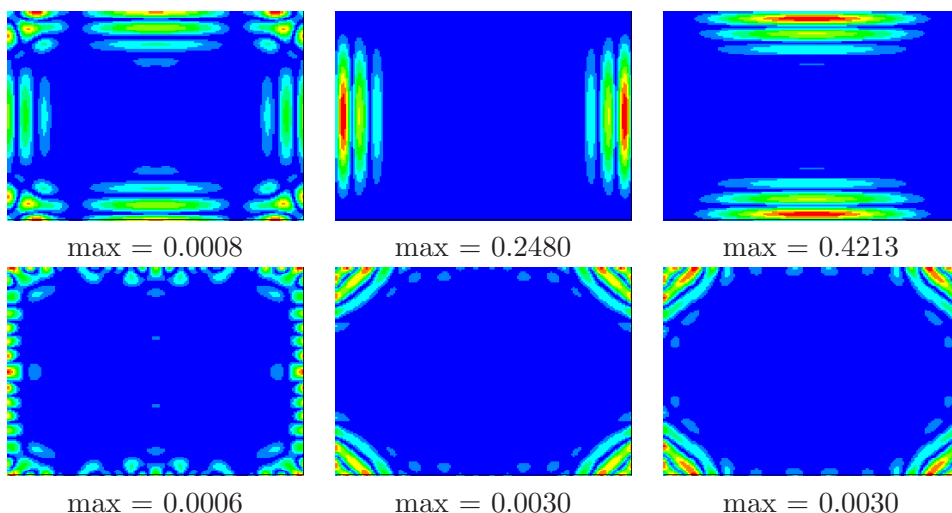


Figura 6.37: Índice de daño  $D$  comparando los modos 1 (izquierda), 2 (centro) y 3 (derecha) de la placa CFRP1 sin daño calculados mediante simulación FEM con los correspondientes modos calculados con el método de Ritz con  $M = N = 2$ , realizando extensión simétrica (arriba) y la descrita en la Sección 5.3.3 (abajo), junto a los valores máximos de  $D$  para cada gráfica.

### 6.4.2 Criterio de detección de daño

Los resultados se presentan en diferentes tablas, según un código de colores que indica el grado de detección de daño. Sin embargo, por ser la extensión de los modos diferente, las gráficas tendrán un aspecto diferente, estando todo el ruido concentrado cerca de los bordes (especialmente en las esquinas). El criterio fue el siguiente:

El texto en color rojo indica que no se ha podido detectar daño. En la Figura 6.38 se pueden observar varios ejemplos de estos casos, que obviamente son fallos de la técnica.

El texto en color verde indica que se ha podido detectar y localizar el daño con claridad. En la Figura 6.39 se pueden observar varios ejemplos de estos casos.

El texto en color azul indica que se ha podido detectar el daño, si bien la localización queda menos clara, al aparecer valores altos del índice  $D_R$  alrededor de la posición del daño, pero no en la posición del daño en sí. En la Figura 6.40 se pueden observar varios ejemplos de estos casos.



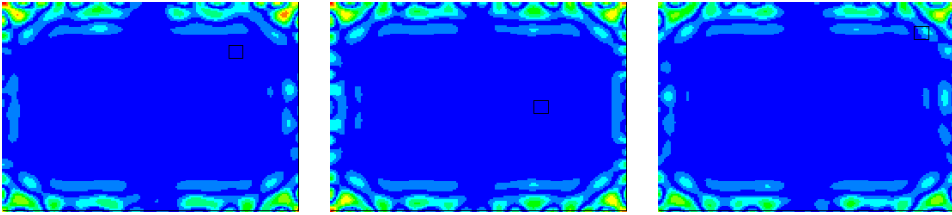


Figura 6.38: Ejemplo de figuras del índice de daño  $D_R$  en las que no se detectado el daño (cuya posición está marcada con una línea negra) con claridad (rojo).

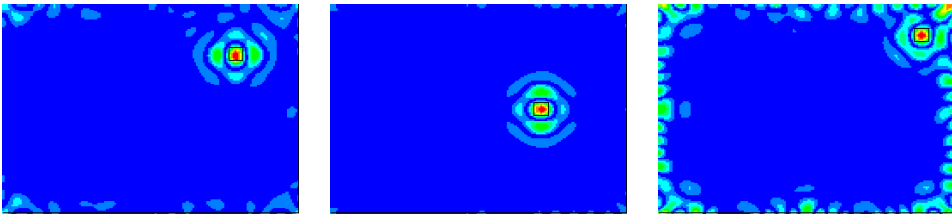


Figura 6.39: Ejemplo de figuras del índice de daño  $D_R$  en las que se ha detectado y localizado el daño (cuya posición está marcada con una línea negra) con claridad (verde).

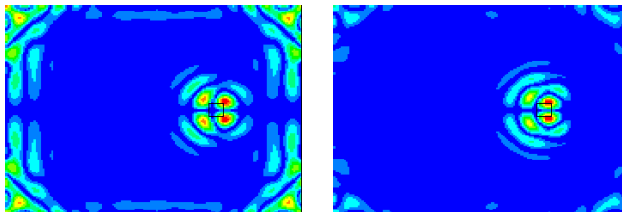


Figura 6.40: Ejemplo de figuras del índice de daño  $D_R$  en las que se ha detectado el daño (cuya posición está marcada con una línea negra), pero su localización queda menos clara (azul).

El texto en color **naranja** indica que se ha podido detectar y localizar el daño, aunque otros puntos de la placa (siempre cerca del borde) presentan también valores altos de  $D_R$ , lo que puede llevar a confusión (falsos positivos) o a la no detección de daño en condiciones menos idóneas (por ejemplo con ruido experimental). El criterio elegido en este caso ha sido que el daño se visualice, pero no en color rojo (según la escala de la Figura 6.30). En la Figura 6.41 se pueden observar varios ejemplos de estos casos.

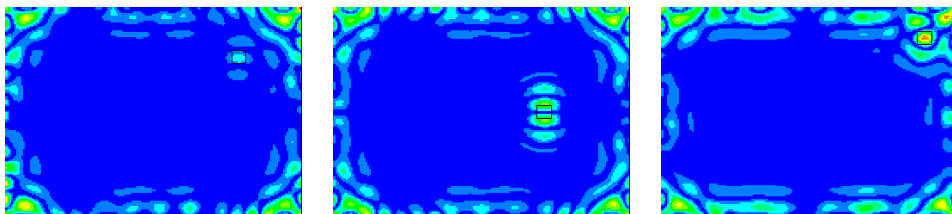


Figura 6.41: Ejemplo de figuras del índice de daño  $D_R$  en las que se ha detectado y localizado el daño (cuya posición está marcada con una línea negra), aunque otros puntos de la placa también presentan valores altos de  $D_R$  (**naranja**).

El texto en color **rosa** indica que se ha podido detectar el daño, si bien se presentan dos problemas: por un lado, aparecen valores altos de  $D_R$  alrededor de la posición del daño, pero no en la posición del daño en sí; por otro lado otros puntos de la placa presentan también valores altos de  $D_R$ . El criterio elegido ha sido similar al del punto anterior. En la Figura 6.42 se pueden observar varios ejemplos de estos casos.

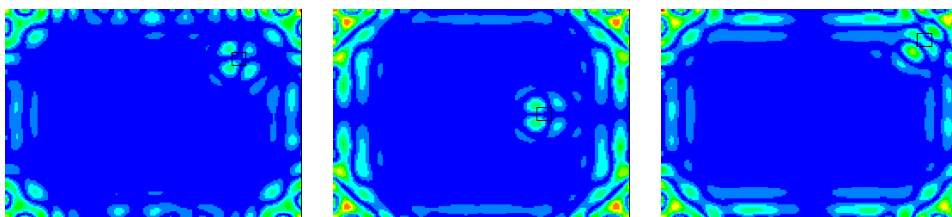


Figura 6.42: Ejemplo de figuras del índice de daño  $D_R$  en las que se ha detectado el daño (cuya posición está marcada con una línea negra), aunque presentan problemas de localización, y otros puntos de la placa también presentan valores altos de  $D_R$  (**rosa**).

### 6.4.3 Resultados

La Tabla 6.5 sintetiza los resultados para los tres primeros modos de la placa Aluminio, siendo los modos dañados ( $M_d$ ) calculados mediante simulación FEM. Se observa que los daños por agujero son fácilmente detectados, solo teniendo problemas de localización en uno de ellos. Sin embargo, los daños por aumento y disminución de densidad no son detectados en ningún caso. En cuanto a los daños por disminución en el módulo de Young, para las posiciones P1 y P2, véase que son detectados en general (excepto el -1 %, que solo es detectado en un caso). En la posición P3, la localización del daño solo se produce (y con dificultades) para el caso de una disminución de -25 %.

Placa Aluminio										
		Modo 1			Modo 2			Modo 3		
Agujero	P1	2 cm	4 cm		2 cm	4 cm		2 cm	4 cm	
	P2	2 cm	4 cm		2 cm	4 cm		2 cm	4 cm	
	P3	2 cm	4 cm		2 cm	4 cm		2 cm	4 cm	
Aumento en la densidad	P1	+1 %	+5 %	+10 %	+1 %	+5 %	+10 %	+1 %	+5 %	+10 %
	P2	+1 %	+5 %	+10 %	+1 %	+5 %	+10 %	+1 %	+5 %	+10 %
	P3	+1 %	+5 %	+10 %	+1 %	+5 %	+10 %	+1 %	+5 %	+10 %
Disminución en la densidad	P1	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %
	P2	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %
	P3	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %
Disminución en el módulo de Young	P1	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %
		-15 %	-20 %	-25 %	-15 %	-20 %	-25 %	-15 %	-20 %	-25 %
	P2	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %
		-15 %	-20 %	-25 %	-15 %	-20 %	-25 %	-15 %	-20 %	-25 %
	P3	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %
		-15 %	-20 %	-25 %	-15 %	-20 %	-25 %	-15 %	-20 %	-25 %

Tabla 6.5: Resultados de detección de daño para los tres primeros modos de la placa Aluminio usando el índice de daño  $D_R$ . Modos dañados ( $M_d$ ) calculados mediante simulación FEM para diferentes tipos de daño en las posiciones P1, P2 y P3.

La Tabla 6.6 sintetiza los resultados para los tres primeros modos de la placa CFRP1, siendo los modos dañados ( $M_d$ ) calculados mediante simulación FEM. Se observa que los daños por agujero son fácilmente detectados, solo teniendo problemas de localización en uno de ellos. Sin embargo, los daños por aumento y disminución de densidad son detectados en tres casos para cada tipo de daño, y todos ellos presentan otros puntos de la placa con un valor alto de  $D_R$ . En cuanto

a los daños por disminución en ambos módulos de Young, son detectados bien en general, presentando problemas las combinaciones Modo 1/P1 y Modo 3/P3. De nuevo la posición P3 es la que presenta más fallos. Si comparamos con los resultados de la Tabla 6.5, se observa que los daños son mejor detectados en la placa CFRP1 que en la placa Aluminio.

		Placa CFRP1								
		Modo 1			Modo 2			Modo 3		
Agujero	P1	2 cm	4 cm		2 cm	4 cm		2 cm	4 cm	
	P2	2 cm	4 cm		2 cm	4 cm		2 cm	4 cm	
	P3	2 cm	4 cm		2 cm	4 cm		2 cm	4 cm	
Aumento en la densidad	P1	+1 %	+5 %	+10 %	+1 %	+5 %	+10 %	+1 %	+5 %	+10 %
	P2	+1 %	+5 %	+10 %	+1 %	+5 %	+10 %	+1 %	+5 %	+10 %
	P3	+1 %	+5 %	+10 %	+1 %	+5 %	+10 %	+1 %	+5 %	+10 %
Disminución en la densidad	P1	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %
	P2	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %
	P3	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %
Disminución en ambos módulos de Young	P1	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %
		-15 %	-20 %	-25 %	-15 %	-20 %	-25 %	-15 %	-20 %	-25 %
	P2	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %
		-15 %	-20 %	-25 %	-15 %	-20 %	-25 %	-15 %	-20 %	-25 %
	P3	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %	-1 %	-5 %	-10 %
		-15 %	-20 %	-25 %	-15 %	-20 %	-25 %	-15 %	-20 %	-25 %

Tabla 6.6: Resultados de detección de daño para los tres primeros modos de la placa CFRP1 usando el índice de daño  $D_R$ . Modos dañados ( $M_d$ ) calculados mediante simulación FEM para diferentes tipos de daño en las posiciones P1, P2 y P3.

## 6.5 Discusión

El análisis modal de placas dañadas nos aporta las siguientes conclusiones:

- Los cambios en frecuencia son demasiado pequeños para detectar daño, incluso para daños grandes.
- La forma de los modos no cambia de forma apreciable a simple vista para daños pequeños, pero sí en algunos modos para daños grandes. Sin embargo estos cambios de forma no permiten averiguar de una manera sencilla la localización del daño.

- El *Modal Assurance Criterium* (MAC) es una técnica válida para detectar daños mediante análisis modal, con modos generados mediante simulación FEM y el método de Ritz, siempre que estos daños no sean muy pequeños, en cuyo caso puede fallar. En el caso de daños por agujero, el MAC presenta unos valores mucho mayores en el caso de modos generados mediante el método de Ritz que en el caso de modos generados mediante simulación FEM, lo que hace pensar que en el primer caso el daño está sobredimensionado. Para el resto de daños estudiados, los valores MAC son muy parecidos en ambos casos. Como desventajas, el MAC necesita de un gran número de modos para que los resultados sean fiables, no aporta información sobre localización del daño, y requiere información sobre la placa sin daño.
- La Transformada Wavelet continua bidimensional es una técnica válida para, mediante análisis modal, detectar y localizar daños por agujero y por disminución del módulo de Young, incluso para daños pequeños. En el caso de aumento y disminución de la densidad, y siendo los modos generados mediante simulación FEM, los resultados presentan múltiples falsos negativos (fallos de la técnica) en los tres modos estudiados, especialmente para los daños más bajos. Sin embargo, cuando los modos son generados mediante el método de Ritz, los daños son localizados con facilidad, lo que hace pensar de nuevo que el daño está sobredimensionado. La principal desventaja de esta técnica es que requiere información de la placa sin daño, cosa que no siempre es posible desde un punto de vista práctico.
- La técnica híbrida basada en el método de Ritz y la Transformada Wavelet continua bidimensional, propuesta en esta Tesis, es una técnica válida para, mediante análisis modal, detectar y localizar daños por agujero y (en menor medida) por disminución del módulo de Young. Sin embargo, no es capaz de localizar el daño (salvo un par de casos, y con dificultades) en los casos de aumento y disminución de la densidad. Presenta además la gran ventaja de no requerir información sobre la placa sin daño.



## Capítulo 7

# Detección de daño mediante análisis en frecuencia de series temporales

### 7.1 Análisis en frecuencia de series temporales en placas dañadas

En esta Sección se presentan los resultados del análisis en frecuencia de series temporales en placas dañadas, con los daños descritos en las Secciones 5.1 y 5.2.

#### 7.1.1 Daños por agujero

En esta Sección se presentan los resultados de **simulación numérica** sobre placas con **daños por agujero**. Estos daños están descritos en la Sección 5.1 y consisten en sendos agujeros cuadrados de lado 2 y 4 cm, centrados en la posición P1 ( $x = 0.670$  m,  $y = 0.495$  m) de las placas Aluminio y CFRP1. En todos los casos la **excitación** usada ha sido **el mismo ruido blanco**, similar a la descrita en la Sección 4.2.3. Debido a la similitud entre sensores en placas simétricas, en todas las figuras se ha usado solamente la señal del **sensor S1**.

En las Figuras 7.1 y 7.2 se observan las respuestas en frecuencia en el sensor S1 de las placas Aluminio y CFRP1, respectivamente, con daño por agujero en la posición P1, comparadas con la Respuesta en Frecuencia de la placa sin daño (D0),

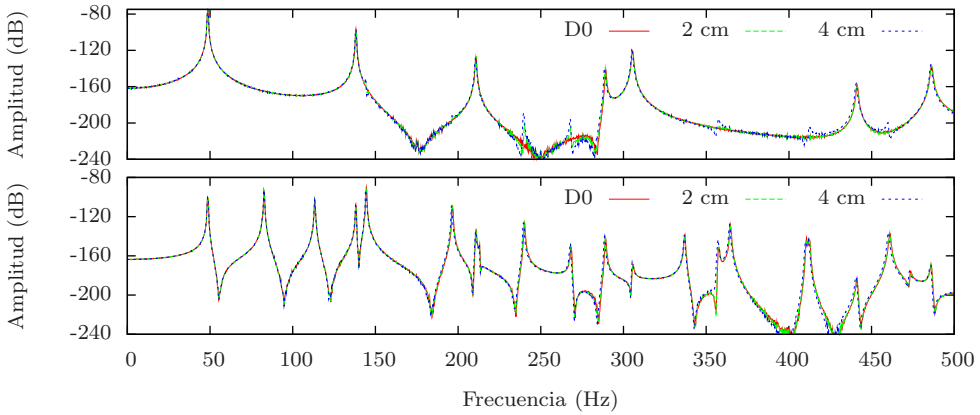


Figura 7.1: Respuesta en Frecuencia en el sensor S1 de la placa Aluminio con daños por agujero en la posición P1, ante una excitación tipo ruido blanco, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo), con señales obtenidas mediante simulación FEM.

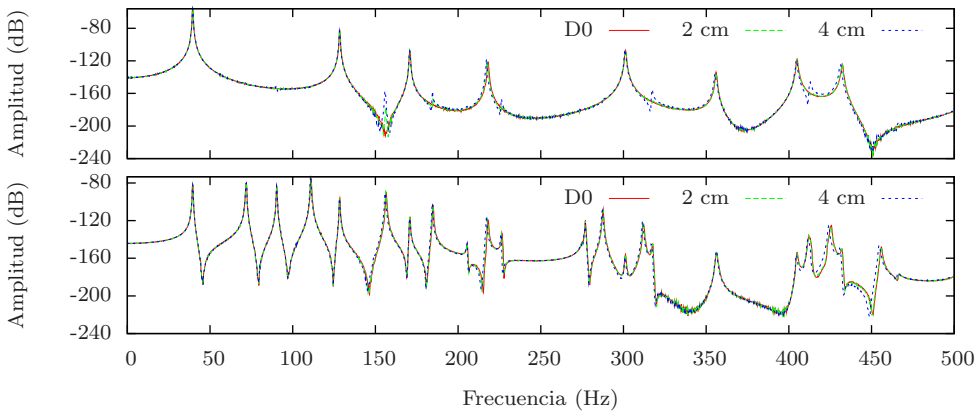


Figura 7.2: Respuesta en Frecuencia en el sensor S1 de la placa CFRP1 con daños por agujero en la posición P1, ante una excitación tipo ruido blanco, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo), con señales obtenidas mediante simulación FEM.



ante una excitación tipo ruido blanco usando los actuadores A1 y A2. En ambas se observa que los cambios son muy pequeños respecto de la placa sin daño, siendo en general mayores cuanto mayor es la frecuencia. Igualmente se observa que, al utilizar el actuador A1, en las placas con daño aparecen frecuencias correspondientes a modos no activos del actuador A1, especialmente en el caso del agujero de 4 cm. Esto es debido a la pérdida de simetría del sistema al introducir el agujero, que hace que los centros de las placas dejen de ser nodos de algunos modos de vibración.

### 7.1.2 Daños por aumento y disminución de la densidad

En esta Sección se presentan los resultados de **simulación numérica** sobre placas con **daños por aumento y disminución de la densidad**. Estos daños están descritos en la Sección 5.1 y consisten en cambios en la densidad en un área de 4 cm, centrada en la posición P1 ( $x = 0.670$  m,  $y = 0.495$  m) de las placas Aluminio y CFRP1. En todos los casos la **excitación** usada ha sido **el mismo ruido blanco**, similar a la descrita en la Sección 4.2.3. Debido a la similitud entre sensores en placas simétricas, en todas las figuras se presenta solamente la señal del **sensor S1**.

Como ejemplo, en las Figuras 7.3 y 7.4 se observan las respuestas en frecuencia en el sensor S1 de la placa CFRP1, con daño por aumento y disminución de la densidad en la posición P1, comparadas con la Respuesta en Frecuencia de la placa sin daño (D0), usando los actuadores A1 y A2. En ambas se observa que los cambios son imperceptibles a simple vista. Por brevedad no se muestran los resultados de la placa Aluminio, que también presenta unos cambios imperceptibles a simple vista.

### 7.1.3 Daños por disminución del módulo de Young

En esta Sección se presentan los resultados de **simulación numérica** sobre placas con **daños por disminución del módulo de Young**. Estos daños están descritos en la Sección 5.1 y consisten en cambios en el módulo de Young (en ambos en el caso de la placa CFRP1) en un área de 4 cm, centrada en la posición P1 ( $x = 0.670$  m,  $y = 0.495$  m) de las placas Aluminio y CFRP1. En todos los casos la **excitación** usada ha sido **el mismo ruido blanco**, similar a la descrita en la Sección 4.2.3 y se ha usado solamente la señal del **sensor S1**.

Como ejemplo, en las Figuras 7.5 y 7.6 se observan las respuestas en frecuencia

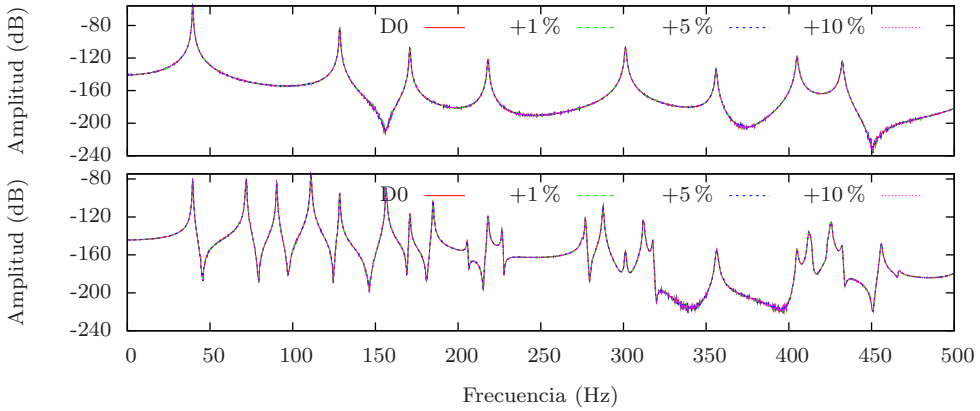


Figura 7.3: Respuesta en Frecuencia en el sensor S1 de la placa CFRP1 con daños por aumento de la densidad en un área cuadrada de 4 cm centrada en la posición P1, ante una excitación tipo ruido blanco, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo), con señales obtenidas mediante simulación FEM.

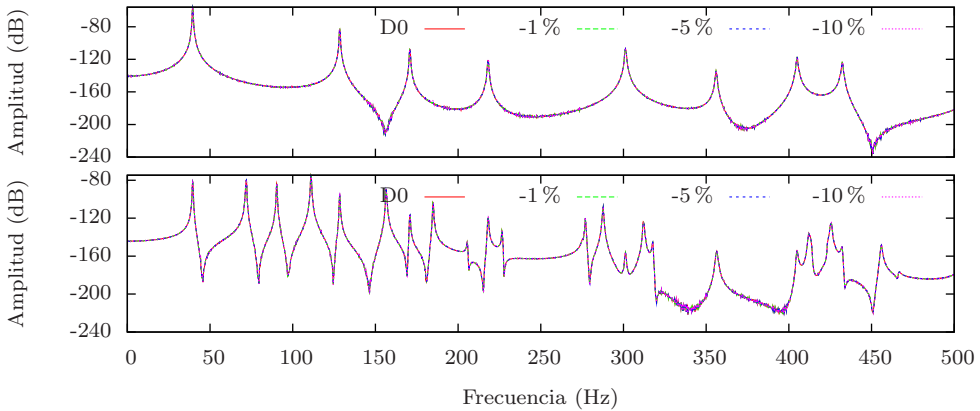


Figura 7.4: Respuesta en Frecuencia en el sensor S1 de la placa CFRP1 con daños por disminución de la densidad en un área cuadrada de 4 cm centrada en la posición P1, ante una excitación tipo ruido blanco, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo), con señales obtenidas mediante simulación FEM.

en el sensor S1 de la placa CFRP1, con daño por disminución del módulo de Young en la posición P1, comparadas con la Respuesta en Frecuencia de la placa sin daño (D0), igualmente usando los actuadores A1 y A2. En ambas se observa que los cambios son imperceptibles a simple vista.

#### 7.1.4 Daños por masa añadida

En esta Sección se presentan los resultados de **ensayos experimentales** sobre placas con **daños por masa añadida**. Estos daños están descritos en la Sección 5.2.1, en concreto los valores de masa están definidos en la Tabla 5.1, y las posiciones donde se colocan las masas están descritas en las Tablas 5.2 (placa Aluminio y CFRP1) y 5.3 (placa CFRP2). En todos los casos la **excitación** usada ha sido tipo **ruido blanco**, similar a la descrita en la Sección 4.2.3, ya que como se observa en la Figura 4.16, los resultados en diferentes ensayos sobre placas sin daño dan resultados muy similares. Debido a la similitud entre sensores en placas simétricas, en todas las figuras se ha usado solamente la señal del **sensor S1**.

Estos resultados se pueden presentar de dos formas, ya que se estudian dos variables: la cantidad de masa añadida y la posición en la que se añade. Por tanto, se presentan los resultados para las seis masas colocadas en la misma posición, y para la misma masa colocada en las diferentes posiciones.

En primer lugar se presentan los resultados para las seis masas colocadas en la misma posición. En las Figuras 7.7 y 7.8 se observan las respuestas en frecuencia en el sensor S1 de la placa Aluminio con daño por masa añadida en las posiciones P1 y P3, respectivamente, comparadas con la Respuesta en Frecuencia de la placa sin daño (D0), ante una excitación tipo ruido blanco usando los actuadores A1 y A2. En ambas figuras se observa que para valores bajos de masa añadida, los cambios de la Respuesta en Frecuencia son muy pequeños, mientras que para valores grandes los cambios se observan a simple vista. Sin embargo, esos cambios no siempre suceden de la misma manera, ya que mientras en la Figura 7.7 se observan cambios importantes en los picos cercanos a 150 Hz, en la Figura 7.8 el pico de 150 Hz apenas cambia, y son los cercanos a 300 Hz los que presentan una gran diferencia. De este hecho se puede concluir que si bien los cambios en la Respuesta en Frecuencia son evidentes, para daños cuya localización no sea conocida, las técnicas basadas en el cambio en el valor de un pico concreto pueden no ser adecuadas, por lo que en la

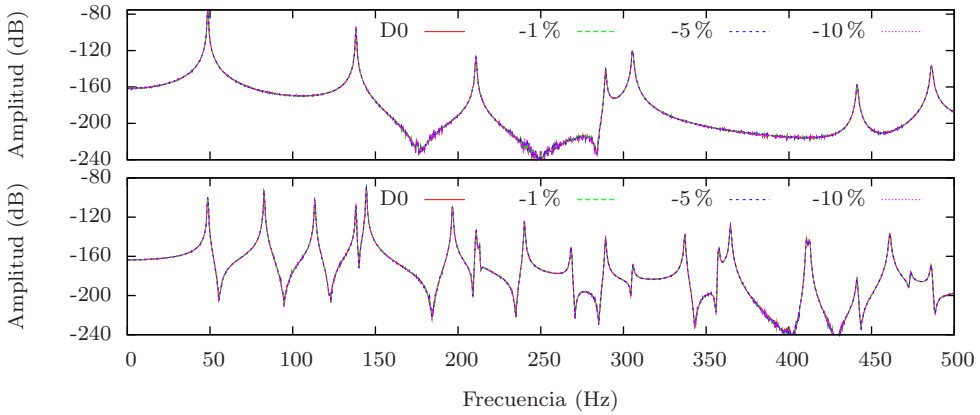


Figura 7.5: Respuesta en Frecuencia en el sensor S1 de la placa Aluminio con daños por disminución del módulo de Young en un área cuadrada de 4 cm centrada en la posición P1, ante una excitación tipo ruido blanco, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo), con señales obtenidas mediante simulación FEM.

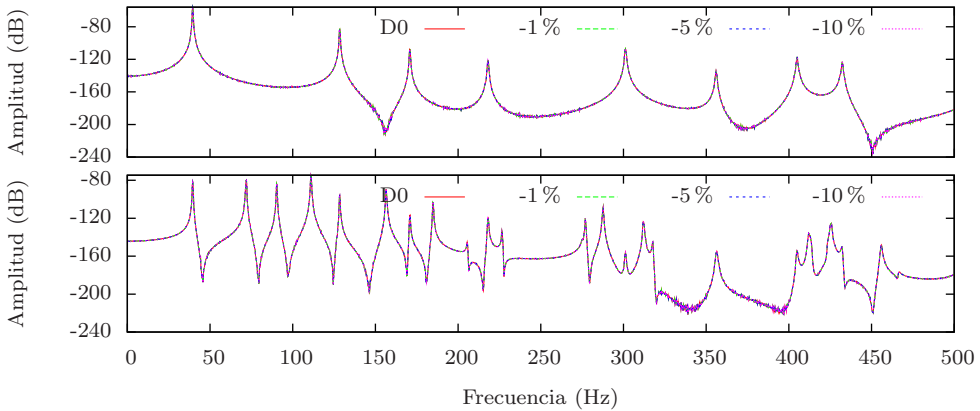


Figura 7.6: Respuesta en Frecuencia en el sensor S1 de la placa CFRP1 con daños por disminución de ambos módulos de Young en un área cuadrada de 4 cm centrada en la posición P1, ante una excitación tipo ruido blanco, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo), con señales obtenidas mediante simulación FEM.

Sección 7.2 se usarán técnicas basadas en los cambios globales.

En las Figuras 7.9 y 7.10 se observan las respuestas en frecuencia en el sensor S1 de la placa CFRP1 con daño por masa añadida en las posiciones P1 y P3, respectivamente, comparadas con la Respuesta en Frecuencia de la placa sin daño (D0), ante una excitación tipo ruido blanco usando los actuadores A1 y A2. De nuevo se observa que para valores bajos de masa añadida, los cambios de la Respuesta en Frecuencia son muy pequeños, mientras que para valores grandes los cambios se observan a simple vista. También se observa que los picos que sufren un cambio grande cuando el daño está en una posición, no tiene por qué cambiar de la misma forma cuando el daño está en otra posición diferente.

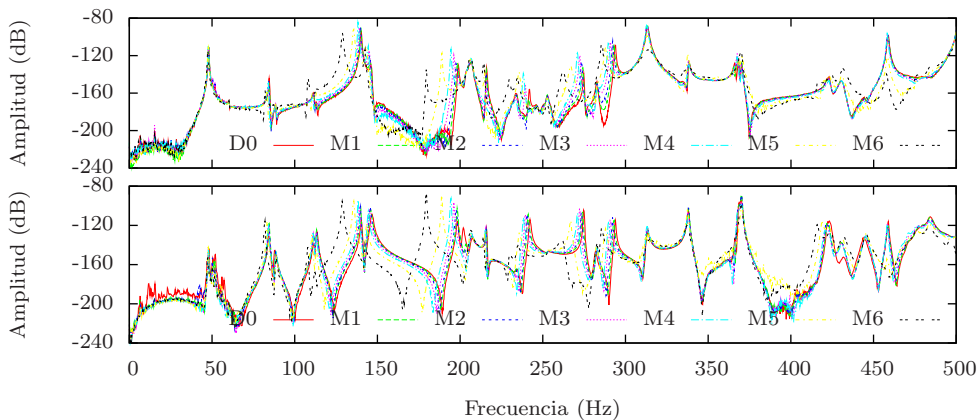


Figura 7.7: Respuesta en Frecuencia en el sensor S1 de la placa Aluminio con daños por masa añadida en la posición P1, ante una excitación tipo ruido blanco, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo), con señales obtenidas mediante ensayos experimentales.

Para la placa CFRP2, al no ser simétrica, se presentan los resultados de los **sensores S1 y S3**. En las Figuras 7.11 y 7.12 se observan las respuestas en frecuencia en los sensores S1 y S3, respectivamente, de la placa CFRP2 con daño por masa añadida en las posiciones P1 y P4, ante una excitación tipo ruido blanco usando el actuador A1. Las conclusiones son similares a las de las placas estudiadas con anterioridad.

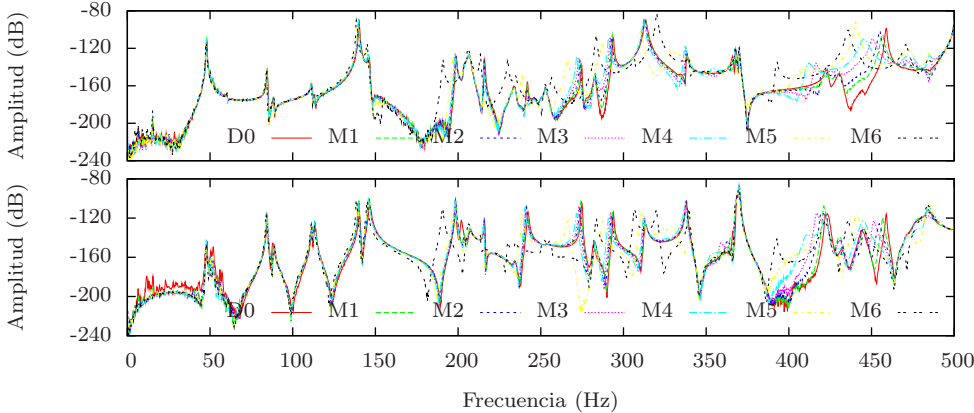


Figura 7.8: Respuesta en Frecuencia en el sensor S1 de la placa Aluminio con daños por masa añadida en la posición P3, ante una excitación tipo ruido blanco, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo), con señales obtenidas mediante ensayos experimentales.

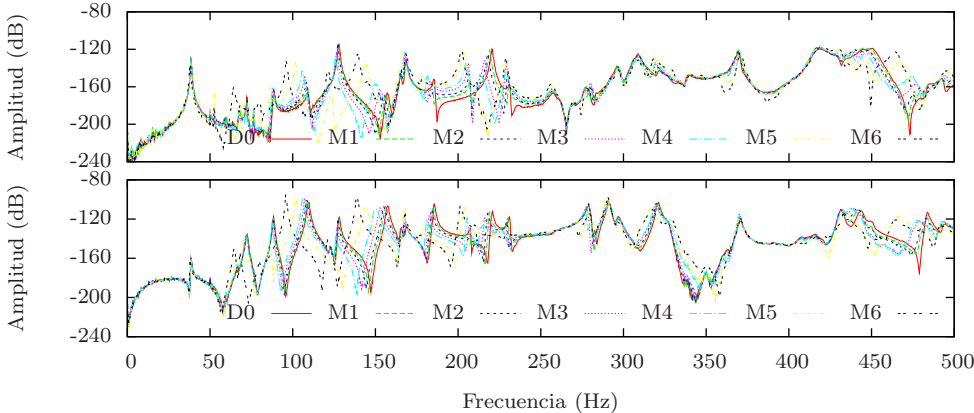


Figura 7.9: Respuesta en Frecuencia en el sensor S1 de la placa CFRP1 con daños por masa añadida en la posición P1, ante una excitación tipo ruido blanco, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo), con señales obtenidas mediante ensayos experimentales.

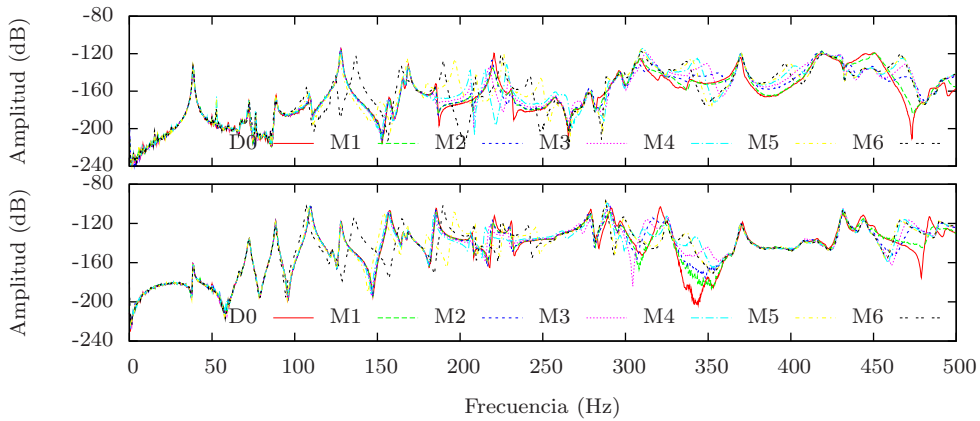


Figura 7.10: Respuesta en Frecuencia en el sensor S1 de la placa CFRP1 con daños por masa añadida en la posición P3, ante una excitación tipo ruido blanco, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo), con señales obtenidas mediante ensayos experimentales.

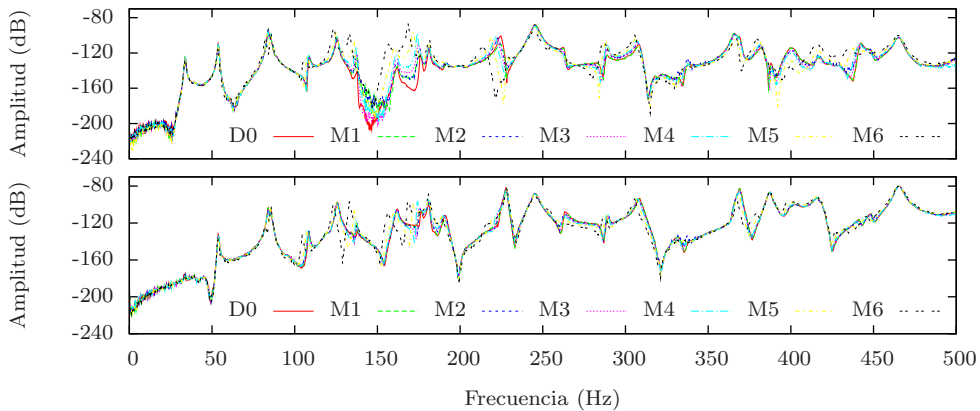


Figura 7.11: Respuesta en Frecuencia en los sensores S1 (arriba) y S3 (abajo) de la placa CFRP2 con daños por masa añadida en la posición P1, ante una excitación tipo ruido blanco usando el actuador A1, con señales obtenidas mediante ensayos experimentales.

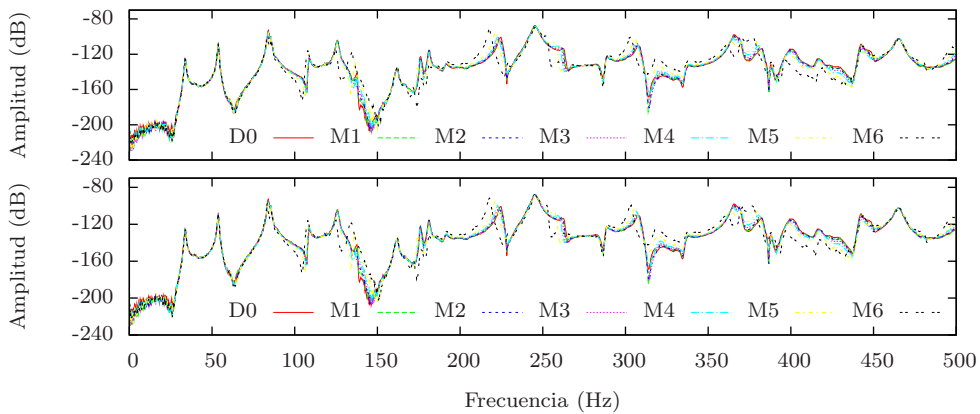


Figura 7.12: Respuesta en Frecuencia en los sensores S1 (arriba) y S3 (abajo) de la placa CFRP2 con daños por masa añadida en la posición P4, ante una excitación tipo ruido blanco usando el actuador A1, con señales obtenidas mediante ensayos experimentales.

En cuanto a los resultados para la misma masa colocada en diferentes posiciones, en las Figuras 7.13 y 7.14 se pueden observar las respuestas en frecuencia en el sensor S1 de la placa Aluminio con daño por masa añadida de valor M1 y M6, respectivamente, en las posiciones P1, P2 y P3, comparadas con la Respuesta en Frecuencia de la placa sin daño (D0), ante una excitación tipo ruido blanco usando los actuadores A1 y A2. En la Figura 7.13 se observa que para un valor bajo de masa añadida, los cambios de la Respuesta en Frecuencia son muy pequeños para las tres posiciones, mientras en la Figura 7.14 se observa que cuando el valor de masa añadida es grande, los cambios en la Respuesta en Frecuencia son grandes, y muy diferentes según cual sea la posición del daño. Para cada posición hay unos picos que cambian más y otros que cambian menos (tanto en posición como en amplitud), por lo que el uso de técnicas basadas en cambios globales de la Respuesta en Frecuencia parece más adecuado para detectar daño.

Conclusiones similares se pueden obtener para la placa CFRP1 (Figuras 7.15 y 7.16), y para la placa CFRP2 (Figuras 7.17 y 7.18).



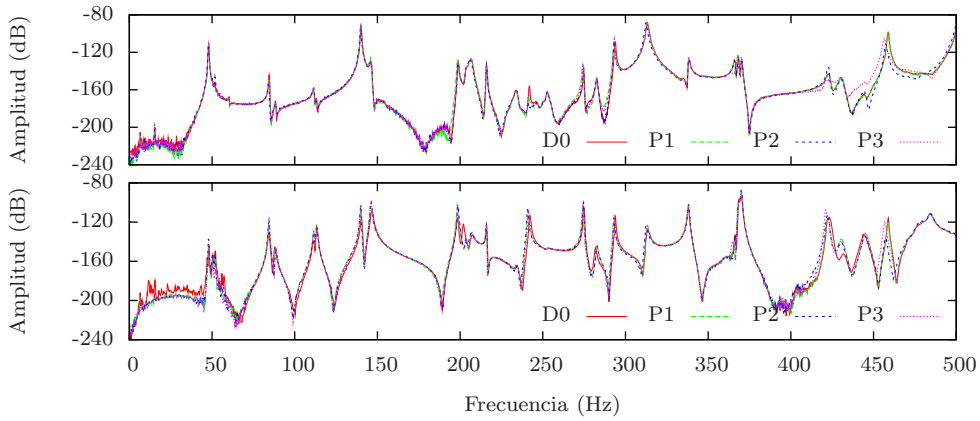


Figura 7.13: Respuesta en Frecuencia en el sensor S1 de la placa Aluminio con daños por masa añadida de valor M1 en diferentes posiciones, ante una excitación tipo ruido blanco, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo), con señales obtenidas mediante ensayos experimentales.

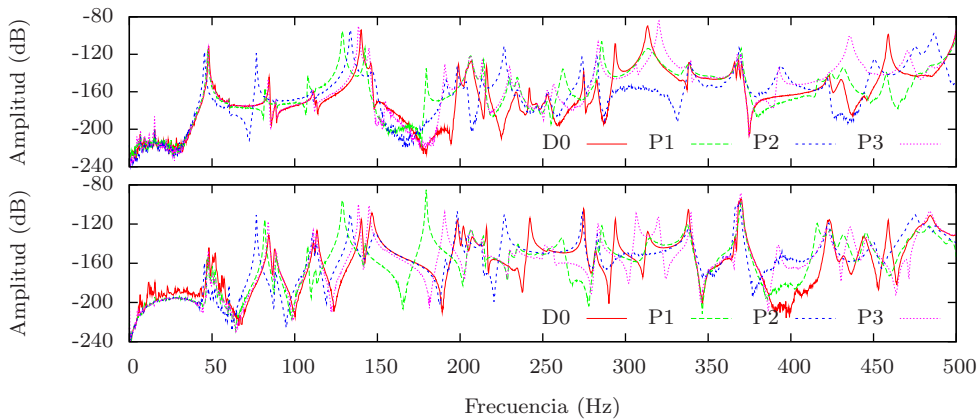


Figura 7.14: Respuesta en Frecuencia en el sensor S1 de la placa Aluminio con daños por masa añadida de valor M6 en diferentes posiciones, ante una excitación tipo ruido blanco, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo), con señales obtenidas mediante ensayos experimentales.

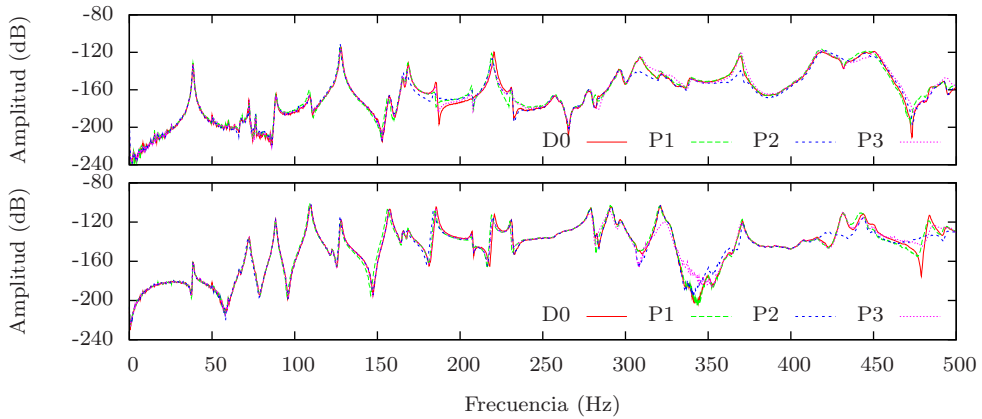


Figura 7.15: Respuesta en Frecuencia en el sensor S1 de la placa CFRP1 con daños por masa añadida de valor M1 en diferentes posiciones, ante una excitación tipo ruido blanco, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo), con señales obtenidas mediante ensayos experimentales.

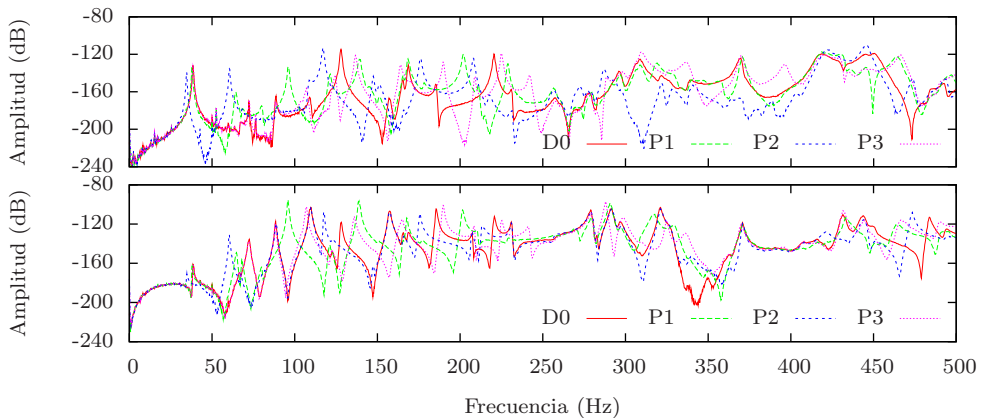


Figura 7.16: Respuesta en Frecuencia en el sensor S1 de la placa CFRP1 con daños por masa añadida de valor M6 en diferentes posiciones, ante una excitación tipo ruido blanco, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo), con señales obtenidas mediante ensayos experimentales.

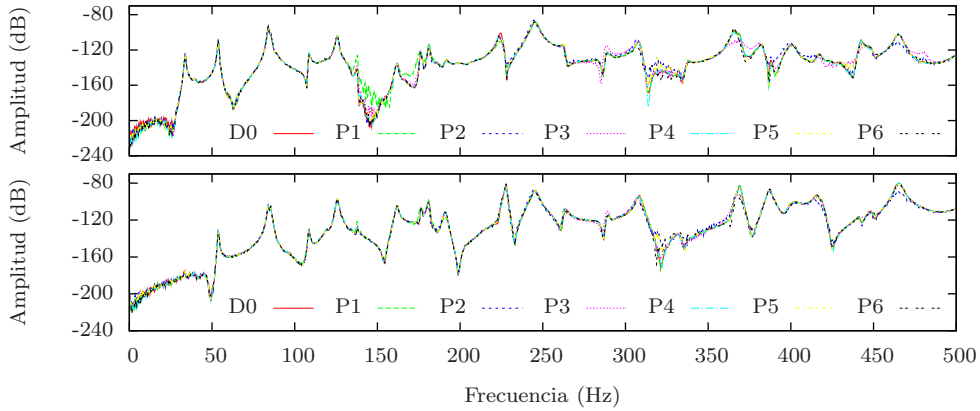


Figura 7.17: Respuesta en Frecuencia en los sensores S1 (arriba) y S3 (abajo) de la placa CFRP2 con daños por masa añadida de valor M1 en diferentes posiciones, ante una excitación tipo ruido blanco usando el actuador A1, con señales obtenidas mediante ensayos experimentales.

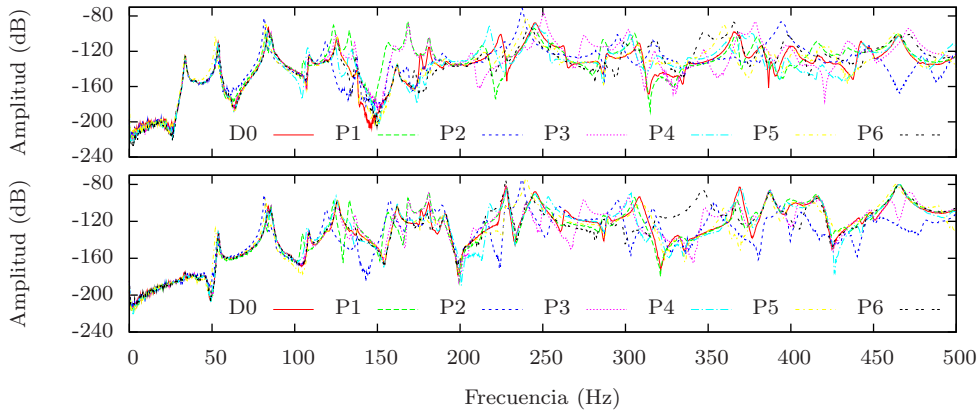


Figura 7.18: Respuesta en Frecuencia en los sensores S1 (arriba) y S3 (abajo) de la placa CFRP2 con daños por masa añadida de valor M6 en diferentes posiciones, ante una excitación tipo ruido blanco usando el actuador A1, con señales obtenidas mediante ensayos experimentales.

### 7.1.5 Daños por cambio en las condiciones de contorno

En esta Sección se presentan los resultados de **ensayos experimentales** sobre placas con **daños por cambio en las condiciones de contorno**. Estos daños están descritos en la Sección 5.2.2, en concreto los torques usados (de cinco en cinco, desde 5 hasta 55 N·m) están definidos en la Tabla 5.4. En todos los casos la **excitación** usada ha sido tipo **ruido blanco** y la única señal usada en las figuras ha sido la del **sensor S1**.

Para una mejor visualización, los resultados se presentan desglosados en dos partes: respuestas en frecuencia de las placas con pares tornillo-tuerca apretados con torques pequeños (de 5 a 30 N·m) y a torques grandes (de 35 a 55 N·m), ambos comparados con la Respuesta en Frecuencia de la placa sin daño (D0, torque 60 N·m).

En las Figuras 7.19 y 7.20 se observan las respuestas en frecuencia en el sensor S1 de la placa Aluminio con daño por cambio en las condiciones de contorno, comparadas con la Respuesta en Frecuencia de la placa sin daño (D0), ante una excitación tipo ruido blanco usando los actuadores A1 y A2. En ambas figuras se observa que para valores altos de torque (cambio pequeño en las condiciones de contorno), los cambios de la Respuesta en Frecuencia son muy pequeños, mientras que para valores de cambio grandes, los cambios se observan a simple vista. Estos cambios son siempre corrimientos de la posición de los picos hacia la izquierda, ya que la placa dañada es menos rígida que la placa sin daño.

Conclusiones similares se pueden obtener para la placa CFRP1 (Figuras 7.21 y 7.22).

### 7.1.6 Daños por cambio de temperatura

En esta Sección se presentan los resultados de **ensayos experimentales** sobre placas con **daños por cambio de temperatura**. Estos daños están descritos en la Sección 5.2.3, donde se observa que en cada experimento las temperaturas eran diferentes, siendo siempre crecientes cuando se usan cinco temperaturas (T0, T1, T2, T3 y T4), primero crecientes y luego decrecientes cuando se usan tres (T0, T1 y T2). En todos los casos la **excitación** usada ha sido tipo **ruido blanco** y la única señal usada en las figuras ha sido la del **sensor S1** (excepto en la placa CFRP2, donde se ha usado también el sensor S3).

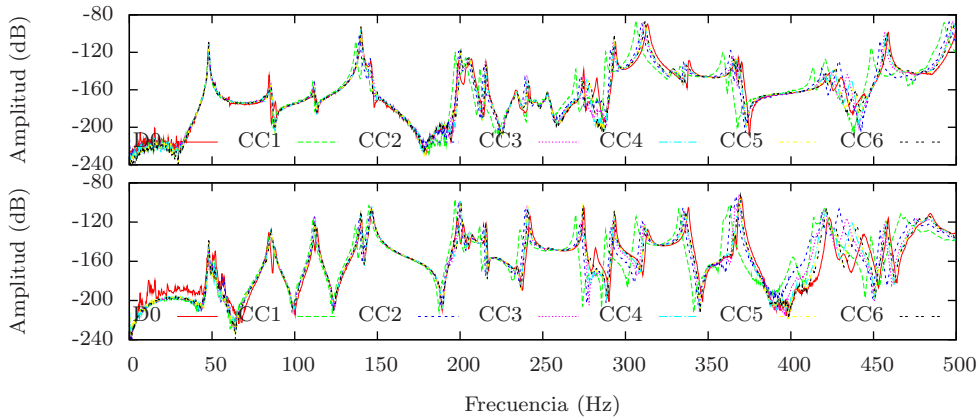


Figura 7.19: Respuesta en Frecuencia en el sensor S1 de la placa Aluminio con daños por cambios grandes en las condiciones de contorno, ante una excitación tipo ruido blanco, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo), con señales obtenidas mediante ensayos experimentales.

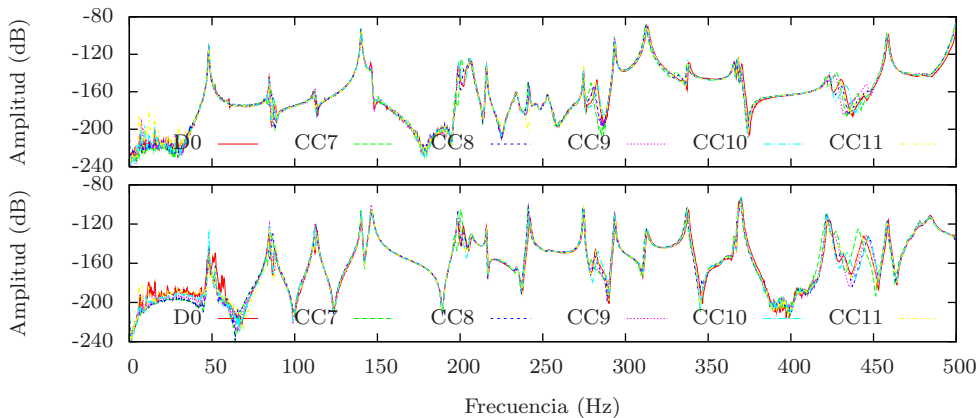


Figura 7.20: Respuesta en Frecuencia en el sensor S1 de la placa Aluminio con daños por cambios pequeños en las condiciones de contorno, ante una excitación tipo ruido blanco, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo), con señales obtenidas mediante ensayos experimentales.

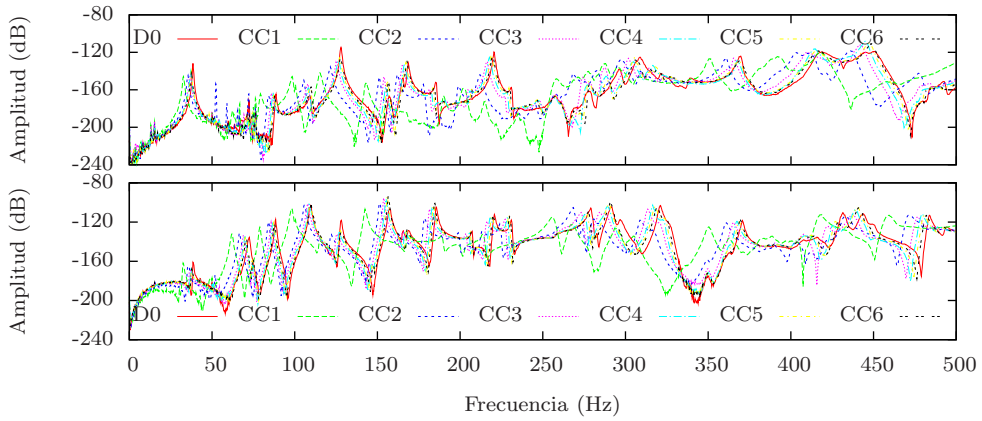


Figura 7.21: Respuesta en Frecuencia en el sensor S1 de la placa CFRP1 con daños por cambios grandes en las condiciones de contorno, ante una excitación tipo ruido blanco, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo), con señales obtenidas mediante ensayos experimentales.

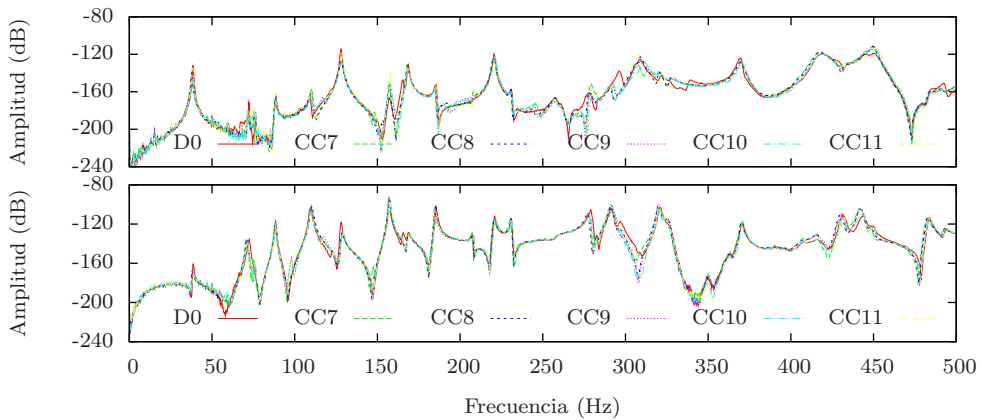


Figura 7.22: Respuesta en Frecuencia en el sensor S1 de la placa CFRP1 con daños por cambios pequeños en las condiciones de contorno, ante una excitación tipo ruido blanco, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo), con señales obtenidas mediante ensayos experimentales.

En la Figura 7.23 se observan las respuestas en frecuencia en el sensor S1 de la placa Aluminio empotrada, con daño por aumento de temperatura, ante una excitación tipo ruido blanco usando los actuadores A1 y A2. Se observa un corrimiento de los picos hacia la izquierda conforme aumenta la temperatura, lo que nos indica que la placa es menos rígida.

En las Figuras 7.24 y 7.25 se observan las respuestas en frecuencia en el sensor S1 de las placas CFRP1 y CFRP2 (respectivamente) empotradas, con daño por aumento de temperatura, ante una excitación tipo ruido blanco usando los actuadores A1 y A2. En estos casos se observa un corrimiento de los picos hacia la derecha conforme aumentan la temperatura, lo que nos indica que la placa es más rígida.

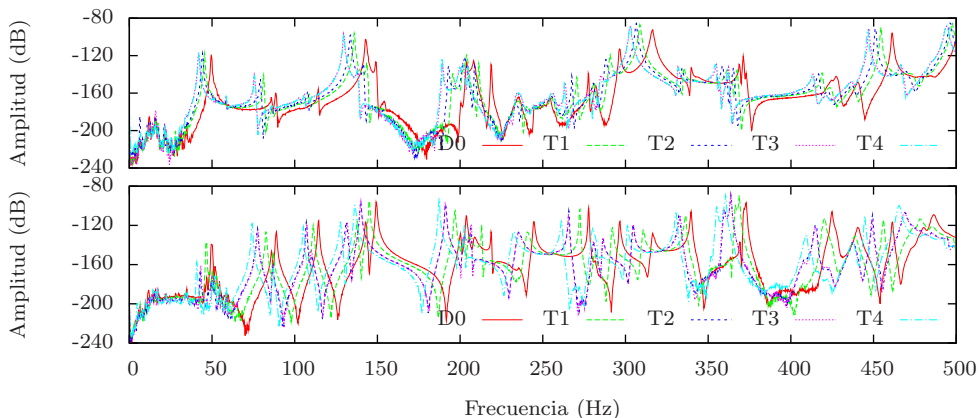


Figura 7.23: Respuesta en Frecuencia en el sensor S1 de la placa Aluminio empotrada (60 N·m) con daños por aumento de temperatura, ante una excitación tipo ruido blanco, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo), con señales obtenidas mediante ensayos experimentales.

Sin embargo, en ensayos similares sobre las placas Aluminio y CFRP1 con la condición de contorno de placa cuasilibre representada en la Figura 3.17, vemos que la posición de los picos no cambia (Figuras 7.26 y 7.27).

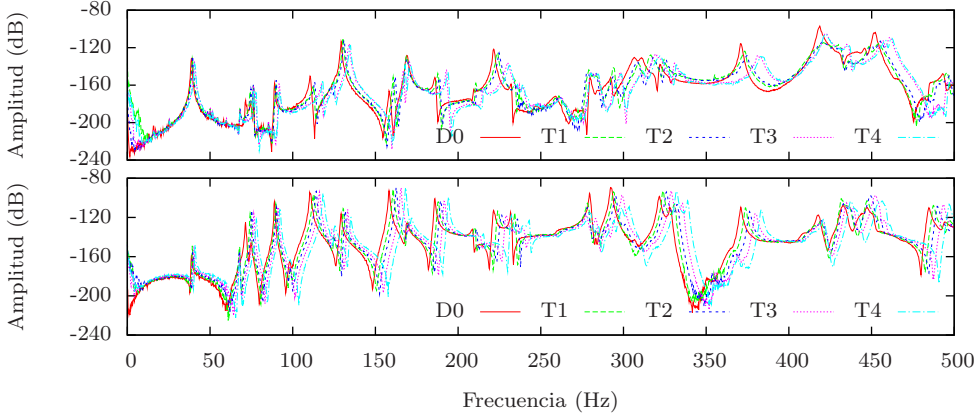


Figura 7.24: Respuesta en Frecuencia en el sensor S1 de la placa CFRP1 empotrada (60 N·m) con daños por aumento de temperatura, ante una excitación tipo ruido blanco, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo), con señales obtenidas mediante ensayos experimentales.

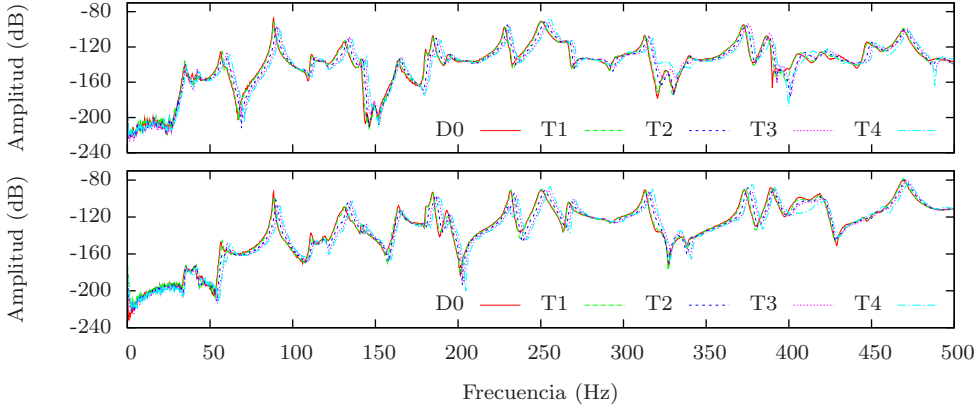


Figura 7.25: Respuesta en Frecuencia en los sensores S1 (arriba) y S3 (abajo) de la placa CFRP2 empotrada (20 N·m) con daños por aumento de temperatura, ante una excitación tipo ruido blanco usando el actuador A1, con señales obtenidas mediante ensayos experimentales.



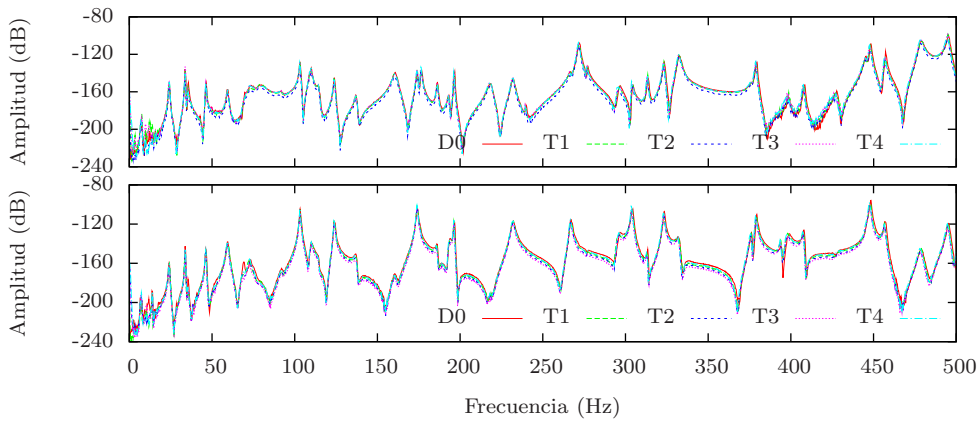


Figura 7.26: Respuesta en Frecuencia en el sensor S1 de la placa Aluminio cuasilibre con daños por aumento de temperatura, ante una excitación tipo ruido blanco, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo), con señales obtenidas mediante ensayos experimentales.

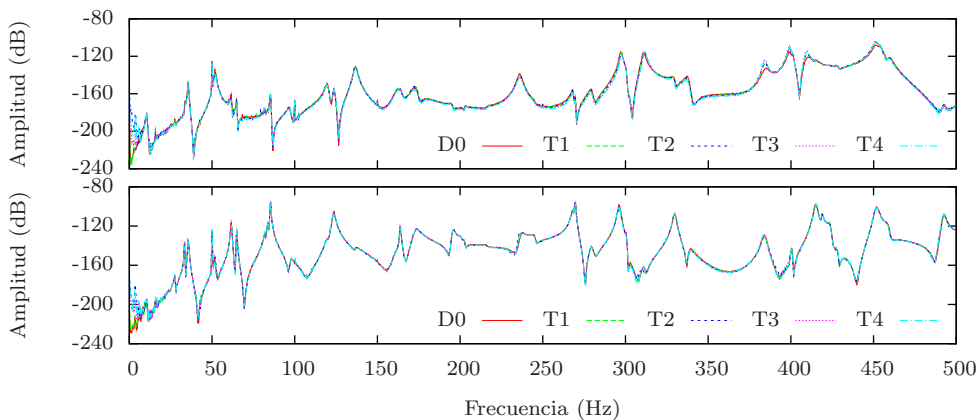


Figura 7.27: Respuesta en Frecuencia en el sensor S1 de la placa CFRP1 cuasilibre con daños por aumento de temperatura, ante una excitación tipo ruido blanco, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo), con señales obtenidas mediante ensayos experimentales.

Por último, en las Figuras 7.28 y 7.29 se observan los resultados del último tipo de ensayo descrito en la Sección 5.2.3, cuya descripción es la siguiente:

Para las placas Aluminio y CFRP1, con los pares tornillo-tuerca apretados a un torque de 60 N·m, se realizaron consecutivamente los siguientes ensayos:

- Se realizó el ensayo a temperatura ambiente (T0, Medida 1).
- Se aumentó la temperatura del laboratorio, repitiendo el ensayo (T1, Medida 2).
- A esta temperatura (T1), se procedió al desapretado de todos los pares tornillo-tuerca, para posteriormente volverlos a apretar y repetir el ensayo de nuevo (Medida 3).
- Finalmente, se dejó enfriar el laboratorio hasta temperatura ambiente (T2) y se repitió el ensayo por última vez (Medida 4).

En la Figura 7.28 se observan los resultados de la Respuesta en Frecuencia en el sensor S1 de la placa Aluminio, ante una excitación tipo ruido blanco usando los actuadores A1 y A2, durante este experimento. Se observa que en la Medida 2 los picos se desplazan a la izquierda (menor rigidez). Posteriormente en la Medida 3 prácticamente coinciden con los de la Medida 1, y por último en la Medida 4 los picos se desplazan hacia la derecha (mayor rigidez).

En la Figura 7.29 se observan los resultados de la Respuesta en Frecuencia en el sensor S1 de la placa CFRP1, ante una excitación tipo ruido blanco usando los actuadores A1 y A2, durante este experimento. En este caso el movimiento de los picos es a la inversa: en la Medida 2 los picos se desplazan a la derecha (mayor rigidez), posteriormente en la Medida 3 prácticamente coinciden con los de la Medida 1, y por último en la Medida 4 los picos se desplazan hacia la izquierda (menor rigidez).

Todos estos resultados pueden ser explicados si tenemos en cuenta los diferentes coeficientes de dilatación lineal ( $\alpha$ ) de los materiales implicados en el experimento:

- **Acero:** material de los marcos de empotramiento de las placas (véase la Sección 3.4).  $\alpha_{acero} \approx 10 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ .
- **Aluminio:** material de la placa Aluminio.  $\alpha_{aluminio} \approx 24 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ .

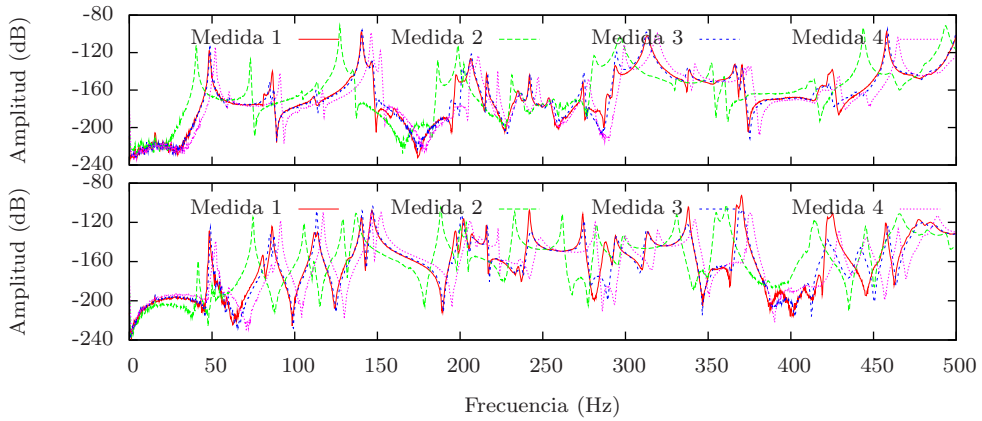


Figura 7.28: Respuesta en Frecuencia en el sensor S1 de la placa Aluminio calentando y enfriando la placa, ante una excitación tipo ruido blanco, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo), con señales obtenidas mediante ensayos experimentales.

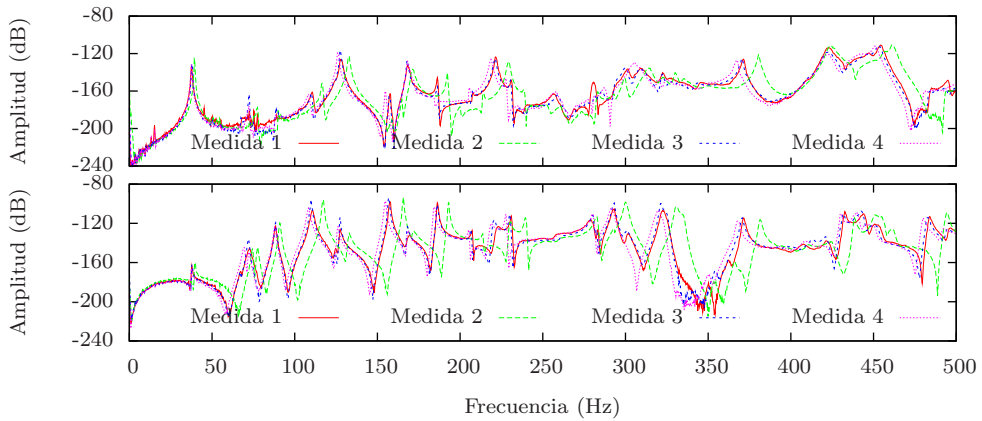


Figura 7.29: Respuesta en Frecuencia en el sensor S1 de la placa CFRP1 calentando y enfriando la placa, ante una excitación tipo ruido blanco, usando los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo), con señales obtenidas mediante ensayos experimentales.

- **CFRP:** materiales de las placas CFRP1 y CFRP2. El coeficiente de dilatación lineal no ha sido proporcionado por el fabricante en ninguno de los dos casos. Es difícil dar una estimación ya que, por un lado, las fibras tienen unos coeficientes de dilatación lineal muy bajos e incluso negativos, mientras que el polímero epoxy tiene un coeficiente de dilatación lineal bastante alto. Por tanto, en un material laminado con fibras en diferentes direcciones, el coeficiente de dilatación lineal será más alto o más bajo en función del porcentaje de fibras que contenga el material. En la Referencia [93] se puede encontrar el valor de  $0.2 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ , aunque no se especifica el laminado del material. En [95] y [98] se pueden encontrar valores para materiales unidireccionales ( $\alpha_{fibras} \approx -10^{-7}/10^{-7} \text{ K}^{-1}$  y  $\alpha_{epoxy} \approx 28 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ), mientras en [77] también se proporcionan para materiales multidireccionales,  $\alpha_{multidireccional} \approx -0,5/2.8 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ . Por tanto, parece razonable suponer que el coeficiente de dilatación lineal de los materiales CFRP será menor que el del acero.

De las Figuras 7.23-7.29 y los valores de los coeficientes de dilatación lineal de los materiales, se deduce que si los pares tornillo-tuerca de los marcos de empotramiento de las placas fueron apretados a una temperatura diferente de la que tenga el laboratorio en un momento dado, la dilatación o compresión térmica puede provocar tensiones en la placa, ya que los materiales de los que están hechas (Aluminio, CFRP) tienen un coeficiente de dilatación lineal muy diferente al del acero (material con el que están fabricados los marcos).

Así, al tener el material de la placa Aluminio un coeficiente de dilatación lineal mayor que el del acero, al aumentar la temperatura cuando la placa está empotrada sufrirá un esfuerzo de compresión, por lo que perderá rigidez y sus frecuencias principales se desplazarán hacia la izquierda (Figuras 7.23 y 7.28), mientras que al disminuir la temperatura estará sometido a un esfuerzo de tensión, por lo que ganará rigidez y sus frecuencias principales se desplazarán hacia la derecha (Figura 7.28).

Por el contrario, las placas CFRP1 y CFRP2 empotradas, sufrirán un esfuerzo de tracción al aumentar la temperatura y uno de compresión al disminuirla, por ser el coeficiente de dilatación lineal de los materiales con los que están hechas menor que el del acero. Por tanto, sus frecuencias se desplazarán hacia la derecha en el

primer caso (Figuras 7.24, 7.25 y 7.29) y hacia la izquierda en el segundo (Figura 7.29).

Sin embargo, cuando no usamos el marco de acero para empotrar las placas (condición de contorno cuasilibre) las frecuencias principales no se desplazan al aumentar la temperatura, como claramente se observa en las Figuras 7.26 y 7.27.

## 7.2 Detección de daño mediante cambios globales de la Respuesta en Frecuencia

En esta Sección se presentan los resultados del índice de daño  $D_T$  definido en la Sección 5.3.4. Por ser independiente de la normalización aplicada a las FRFs, y ser el tipo de distancia más tolerante al daño, como se verá en la Sección 7.3, aquí solo se presentan los resultados obtenidos usando la distancia **spearman**. Por similitud entre sensores, solo se presentan los resultados del sensor S1.

En el caso de las señales obtenidas mediante simulación FEM, se usa una sola señal FRF como referencia, obtenida con la misma señal excitadora que las señales con daño, calculando además el índice de daño usando como señal inspeccionada la de una placa sin daño con una señal excitadora diferente (D0).

En el caso de las señales obtenidas mediante ensayos experimentales, se hicieron dieciseis medidas sobre la placa sin daño, usando como señal de referencia la media de las dieciseis FRFs obtenidas. Posteriormente se calcula el índice de daño  $D_T$  usando como señal inspeccionada cinco señales para cada caso de daño y cinco señales sin daño (D0). A los índices obtenidos se les resta la media de las cinco señales sin daño, y se dividen por la dispersión de estas cinco medidas.

### 7.2.1 Daños por agujero

En las Figuras 7.30 y 7.31 se pueden observar los índices de daño  $D_T$  calculados usando la distancia **spearman**, de las placas Aluminio y CFRP1 (respectivamente) con daño por agujero centrado en la posición P1, usando el sensor S1 y los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha), con señales obtenidas mediante simulación FEM. En ellos se observa que para los dos actuadores, el índice de daño es creciente con el daño y mayor que el calculado en el caso sin daño (excepto uno), si bien todos los casos de agujero de 2 cm se diferencian muy poco de los casos sin daño.

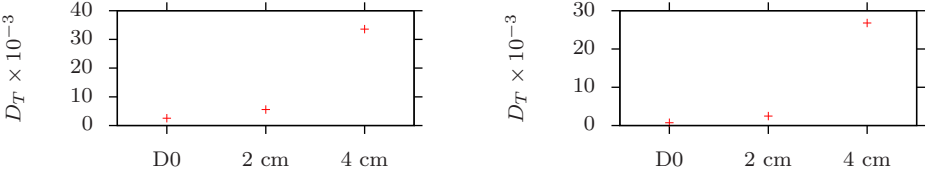


Figura 7.30: Índices de daño  $D_T$  de la placa Aluminio con daño por agujero centrado en la posición P1, usando el sensor S1 y los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha), con señales obtenidas mediante simulación FEM.

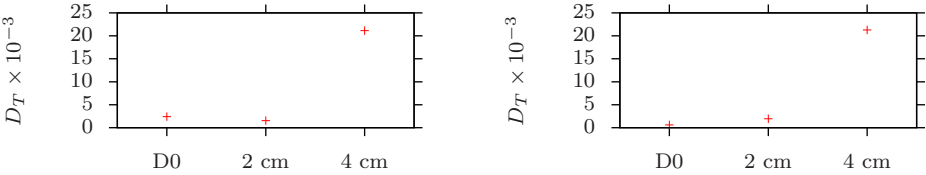


Figura 7.31: Índices de daño  $D_T$  de la placa CFRP1 con daño por agujero centrado en la posición P1, usando el sensor S1 y los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha), con señales obtenidas mediante simulación FEM.

### 7.2.2 Daños por aumento y disminución de la densidad

En las Figuras 7.32 y 7.33 se pueden observar los índices de daño  $D_T$  calculados usando la distancia *spearman*, de las placas Aluminio y CFRP1 (respectivamente) con daño por aumento de la densidad en un área cuadrada de 4 cm centrada en la posición P1, mientras en las Figuras 7.34 y 7.35 se pueden observar los índices correspondientes a daño por disminución de densidad. En todos los casos de daño, el índice calculado es mayor conforme mayor es el daño. Sin embargo, siempre es claramente inferior al índice calculado para la placa sin daño. Por tanto, se puede afirmar que el daño no ha sido detectado.

## 7.2. Detección de daño mediante cambios globales de la Respuesta en Frecuencia

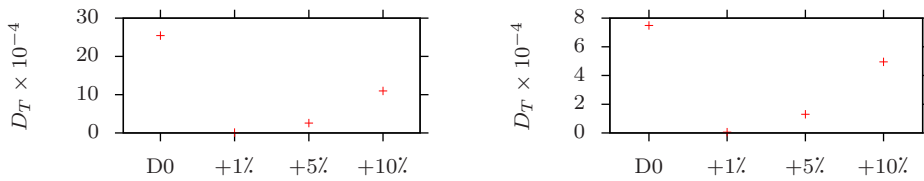


Figura 7.32: Índices de daño  $D_T$  de la placa Aluminio con daño por aumento de la densidad en un área cuadrada de 4 cm centrada en la posición P1, usando el sensor S1 y los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha), con señales obtenidas mediante simulación FEM.

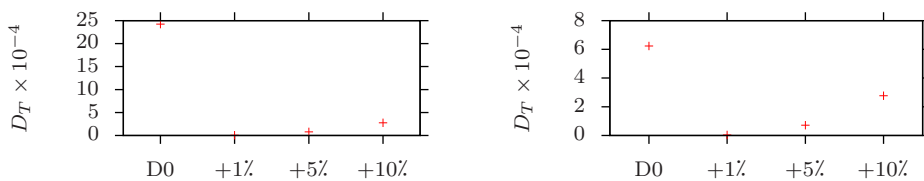


Figura 7.33: Índices de daño  $D_T$  de la placa CFRP1 con daño por aumento de la densidad en un área cuadrada de 4 cm centrada en la posición P1, usando el sensor S1 y los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha), con señales obtenidas mediante simulación FEM.

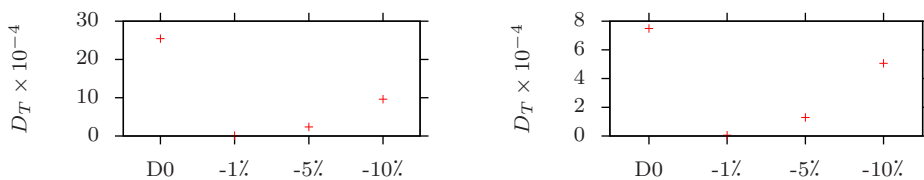


Figura 7.34: Índices de daño  $D_T$  de la placa Aluminio con daño por disminución de la densidad en un área cuadrada de 4 cm centrada en la posición P1, usando el sensor S1 y los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha), con señales obtenidas mediante simulación FEM.

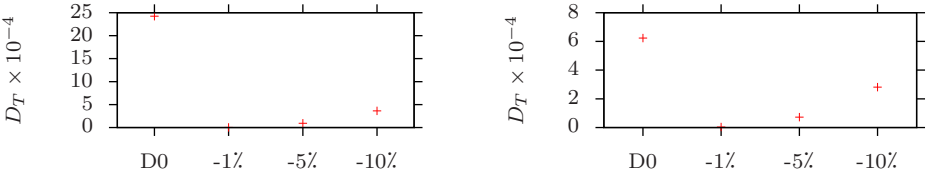


Figura 7.35: Índices de daño  $D_T$  de la placa CFRP1 con daño por disminución de la densidad en un área cuadrada de 4 cm centrada en la posición P1, usando el sensor S1 y los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha), con señales obtenidas mediante simulación FEM.

### 7.2.3 Daños por disminución del módulo de Young

En las Figuras 7.36 y 7.37 se pueden observar los índices de daño  $D_T$  calculados usando la distancia *spearman*, de las placas Aluminio y CFRP1 (respectivamente) con daño por disminución del módulo de Young en un área cuadrada de 4 cm centrada en la posición P1. De nuevo,  $D_T$  crece cuando el daño crece, pero es mayor en el caso de la placa sin daño, por lo que se puede afirmar que el daño no ha sido detectado.

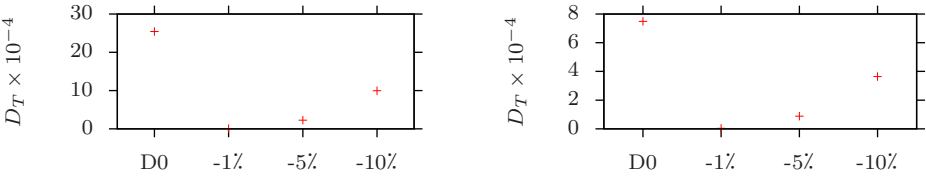


Figura 7.36: Índices de daño  $D_T$  de la placa Aluminio con daño por disminución del módulo de Young en un área cuadrada de 4 cm centrada en la posición P1, usando el sensor S1 y los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha), con señales obtenidas mediante simulación FEM.



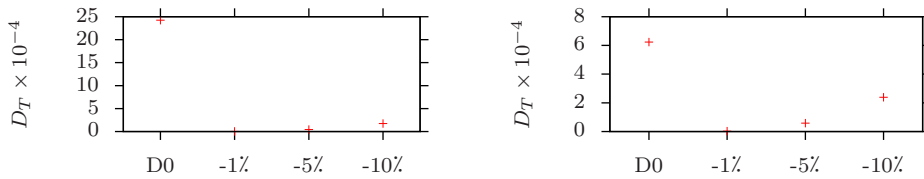


Figura 7.37: Índices de daño  $D_T$  de la placa CFRP1 con daño por disminución de ambos módulos de Young en un área cuadrada de 4 cm centrada en la posición P1, usando el sensor S1 y los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha), con señales obtenidas mediante simulación FEM.

### 7.2.4 Daños por masa añadida

En las Figuras 7.38 y 7.39 se pueden observar los índices de daño  $D_T$  calculados usando la distancia `spearman`, de las placas Aluminio y CFRP1 con daño por masa añadida de valores M1-M6 en las posiciones P1, P2 y P3, usando el sensor S1 y los actuadores A1 y A2. En la Figura 7.40 se pueden observar las figuras equivalentes para el caso de la placa CFRP2 con daño por masa añadida de valores M1-M6 en las posiciones P1-P6, usando el actuador A1 y los sensores S1 y S3.

Si se considera la variación de masa añadida para una posición fija, en la mayoría de los casos el índice de daño crece cuando la masa añadida crece, y en todos es claramente mayor que para la placa sin daño, por lo que se puede concluir que este tipo de daño es fácilmente detectable mediante esta técnica.

Por otro lado, considerando la masa añadida como fija y colocadas en distintas posiciones, se observa que no hay una relación clara que nos indique qué posición del daño produce un mayor cambio en la Respuesta en Frecuencia, ya que esta depende del punto de excitación. Para las placas Aluminio y CFRP1, cuando excitamos con el actuador A1, el índice de daño  $D_T$  es mayor, en general, cuando la masa está colocada en la posición P2, seguido de la posición P3 y por último la posición P1. Sin embargo, cuando excitamos con el actuador A2, el índice de daño mayor lo obtenemos, en general, al colocar la masa en la posición P3, seguido de P1 y P2. Para la placa CFRP2, los valores para el sensor S1 (parte gruesa) son considerablemente menores que para el sensor S3 (parte delgada). Los cambios observados en los índices de daño calculados con las señales obtenidas en los dos

sensores, son mucho menores que las diferencias observadas al cambiar el punto de excitación en las anteriores placas, por tanto la dependencia con el punto de excitación es mucho mayor que con el punto de medida.

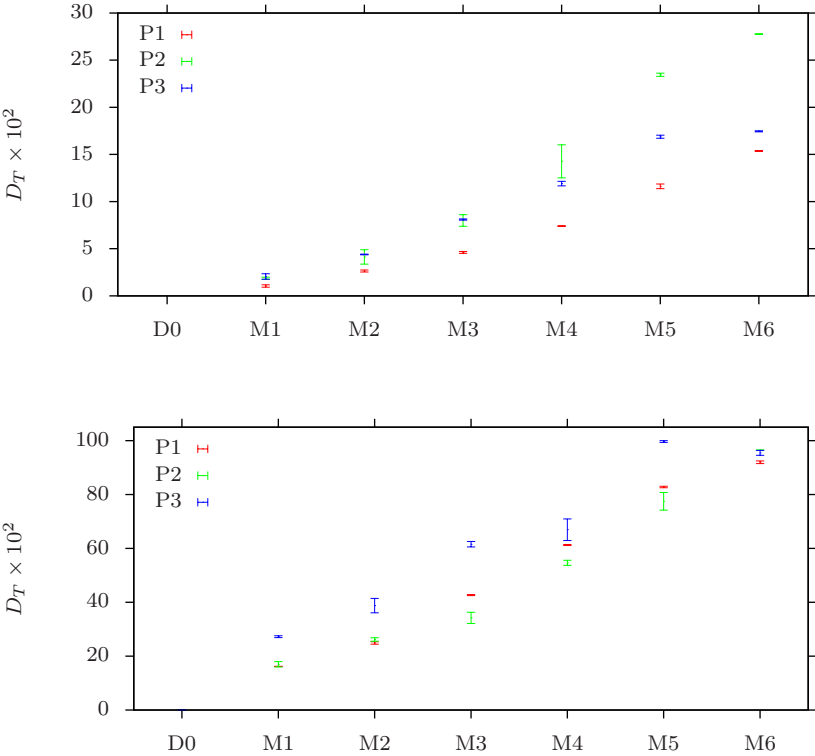


Figura 7.38: Índices de daño  $D_T$  de la placa Aluminio con daño por masas añadidas de valores M1-M6 en las posiciones P1, P2 y P3, usando el sensor S1 y los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo), con señales obtenidas mediante ensayos experimentales.

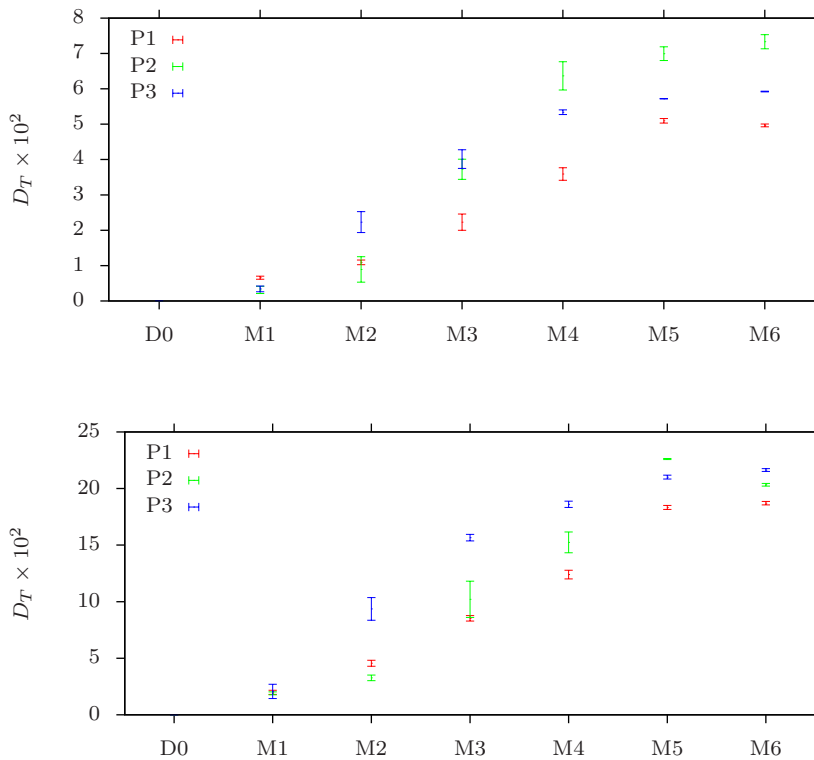


Figura 7.39: Índices de daño  $D_T$  de la placa CFRP1 con daño por masas añadidas de valores M1-M6 en las posiciones P1, P2 y P3, usando el sensor S1 y los actuadores A1 (arriba) y A2 (abajo), con señales obtenidas mediante ensayos experimentales.

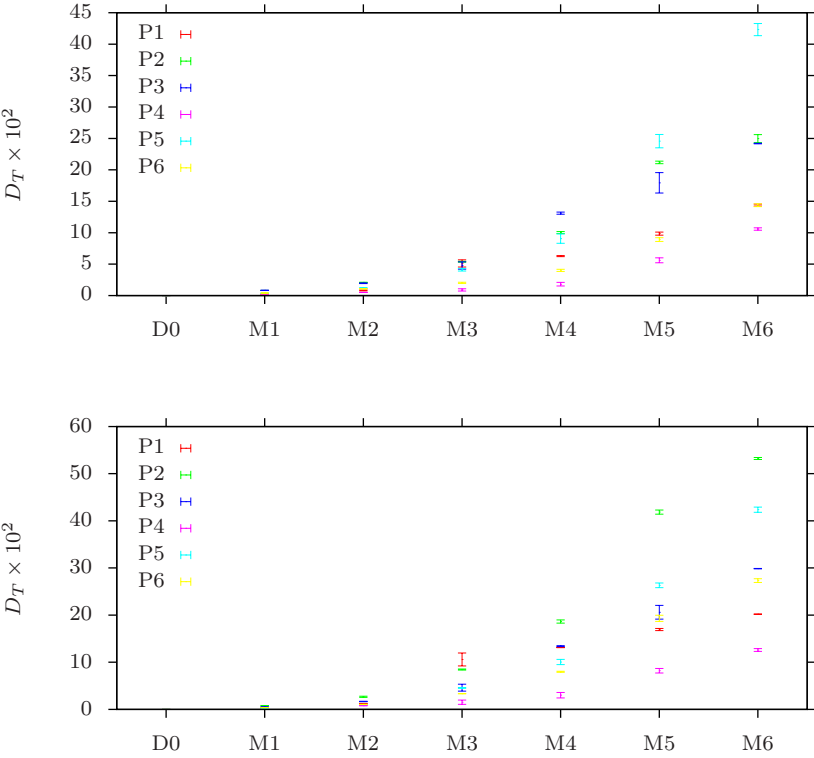


Figura 7.40: Índices de daño  $D_T$  de la placa CFRP2 con daño por masas añadidas de valores M1-M6 en las posiciones P1-P6, usando el actuador A1 y los sensores S1 (arriba) y S3 (abajo), con señales obtenidas mediante ensayos experimentales.

### 7.2.5 Daños por cambio en las condiciones de contorno

En las Figuras 7.41 y 7.42 se pueden observar los índices de daño  $D_T$  calculados usando la distancia *spearman*, de las placas Aluminio y CFRP1 (respectivamente) con daño por cambio en las condiciones de contorno, usando el sensor S1 y los actuadores A1 y A2. La tendencia general es claramente descendente según el torque aplicado se acerca al de la placa sin daño (60 N·m).

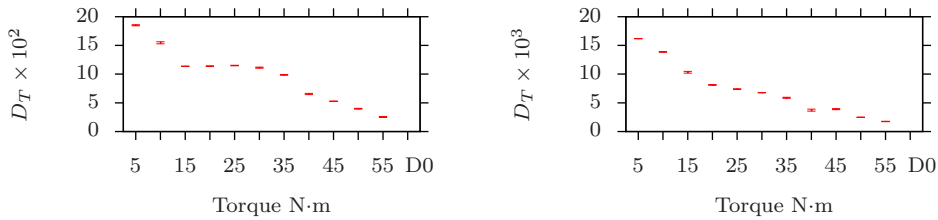


Figura 7.41: Índices de daño  $D_T$  de la placa Aluminio con daño por cambio en las condiciones de contorno, usando el sensor S1 y los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha), con señales obtenidas mediante ensayos experimentales.

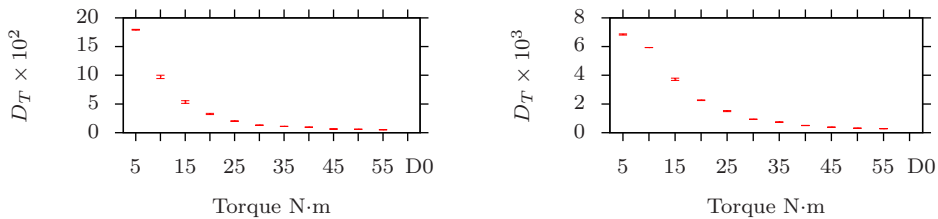


Figura 7.42: Índices de daño  $D_T$  de la placa CFRP1 con daño por cambio en las condiciones de contorno, usando el sensor S1 y los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha), con señales obtenidas mediante ensayos experimentales.

### 7.2.6 Daños por cambio de temperatura

Por último, en las Figuras 7.43, 7.44 y 7.45 se pueden observar los índices de daño  $D_T$  calculados usando la distancia *spearman*, de las placas Aluminio, CFRP1 y CFRP2 (respectivamente) con daño por cambio de temperatura, usando el sensor S1 y los actuadores A1 y A2 para las dos primeras placas y el actuador A1 con los sensores S1 y S3 para la tercera. La tendencia es creciente según aumenta la temperatura (y por tanto, las tensiones térmicas, según se explica en la Sección 7.1.6).

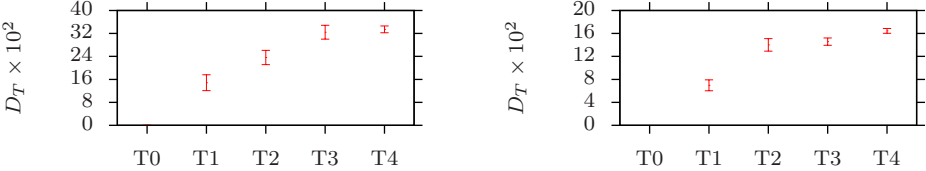


Figura 7.43: Índices de daño  $D_T$  de la placa Aluminio con daño por cambio de temperatura, usando el sensor S1 y los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha), con señales obtenidas mediante ensayos experimentales.

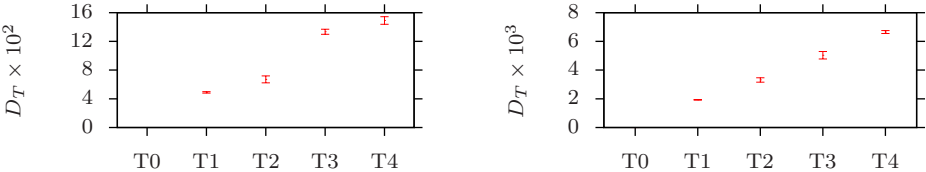


Figura 7.44: Índices de daño  $D_T$  de la placa CFRP1 con daño por cambio de temperatura, usando el sensor S1 y los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha), con señales obtenidas mediante ensayos experimentales.

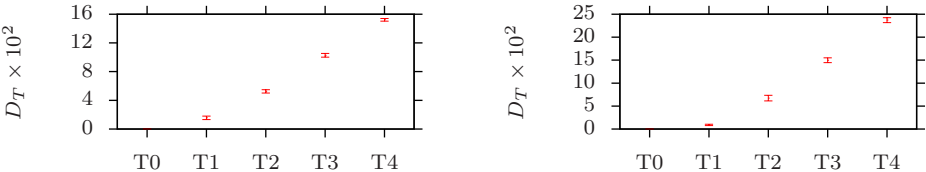


Figura 7.45: Índices de daño  $D_T$  de la placa CFRP2 con daño por cambio de temperatura, usando el actuador A1 y los sensores S1 (izquierda) y S3 (derecha), con señales obtenidas mediante ensayos experimentales.

### 7.3 Tolerancia al ruido del índice de daño $D_T$

Con objeto de estudiar la tolerancia al ruido del índice de daño  $D_T$  usando diferentes definiciones de distancia, se realizaron los cálculos de  $D_T$  para un daño concreto (masa M1 colocada en la posición P1), añadiendo ruido a las señales inspeccionadas. El hecho de considerar las señales inspeccionadas con ruido pero no las señales de referencia está justificado desde el punto de vista industrial, ya que conseguir las condiciones idóneas de bajo ruido (tanto de origen acústico como de origen electromagnético) para obtener las señales de referencia puede ser fácil en muchos casos. Sin embargo una vez la estructura inspeccionada esté en funcionamiento, la posibilidad de tener un alto nivel de ruido en las señales se incrementa notablemente.

El ruido introducido fue tipo ruido blanco. Para caracterizar el nivel de ruido introducido en la señal, se usó el criterio *Signal Noise Ratio* ( $SNR$ ), definido como

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{E_S}{E_R}, \quad (7.1)$$

donde  $E_S$  y  $E_R$  son las energías de la señal sin ruido y del ruido, respectivamente. La energía de una señal se define como

$$E = \sum_i^{N_m} x_i^2, \quad (7.2)$$

siendo  $N_m$  el número de muestras y  $x_i$  los valores de la señal.

Los niveles de ruido introducidos fueron, de menor a mayor, 20 dB, 15 dB, 10 dB, 5 dB y 0 dB, además del caso sin ruido añadido ( $\infty$  dB). En todos los casos, la señal sin ruido fue normalizada de forma que su energía fuera uno, mientras los valores del ruido fueron generados aleatoriamente y posteriormente normalizados para obtener el  $SNR$  deseado.

Se usaron tres tipos de distancias: `citiblock`, `euclidean` y `spearman`, comparando los resultados entre ellas. En las Figuras 7.46, 7.47 y 7.48 se pueden observar los índices de daño  $D_T$  calculados usando la distancia `citiblock`, `euclidean` y `spearman` de la placa Aluminio con daño por masa añadida de valor M1 en la posición P1, usando el sensor S1 y los actuadores A1 y A2. Se considera que no se detecta el daño si la dispersión cruza la línea  $D_T = 1$  (dispersión del caso sin

daño), señalada en las Figuras.

En las dos primeras Figuras, usando el actuador A1, se observa que si bien en el caso sin ruido añadido ( $\infty$  dB) el daño es fácilmente detectado, al añadir ruido los valores de índice de daño  $D_T$  son menores de cero (valor del caso sin daño), por lo que el daño no es detectado y la técnica es muy poco tolerante al daño. Con el actuador A2 los resultados son un poco mejores, ya que en el caso de la distancia `citiblock` el daño es detectado siempre, y en el caso de la `euclidean` para ruidos añadidos de 20 y 15 dB, aunque de forma ajustada. Sin embargo, la distancia `spearman` proporciona mejores resultados para los dos actuadores: en el caso del actuador A1 detecta daño para ruidos añadidos de 10, 15 y 20 dB, y en el caso del actuador A2 para ruidos añadidos de 5, 10, 15 y 20 dB, fallando en ambos casos para 0 dB. A pesar de que usando la distancia `citiblock` y el actuador A2 la tolerancia al ruido añadido es mayor, teniendo en cuanto los dos actuadores la mejor distancia es la distancia `spearman`, por lo que fue la elegida para realizar los cálculos sin ruido añadido expuestos en las secciones anteriores.

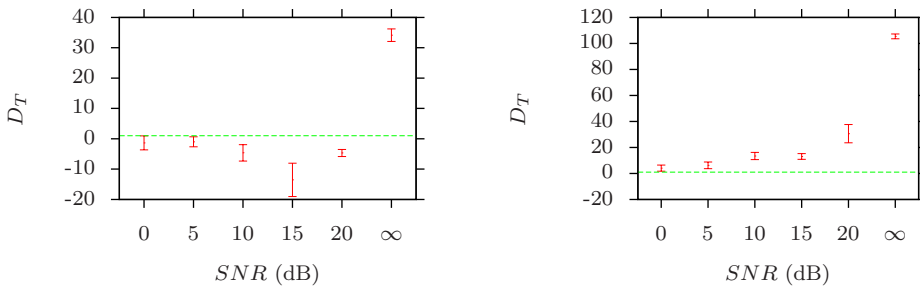


Figura 7.46: Índices de daño  $D_T$  calculados mediante la distancia `citiblock`, de la placa Aluminio con daño por masa M1 añadida en la posición P1, usando el sensor S1 y los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha), con señales obtenidas mediante ensayos experimentales con ruido añadido.



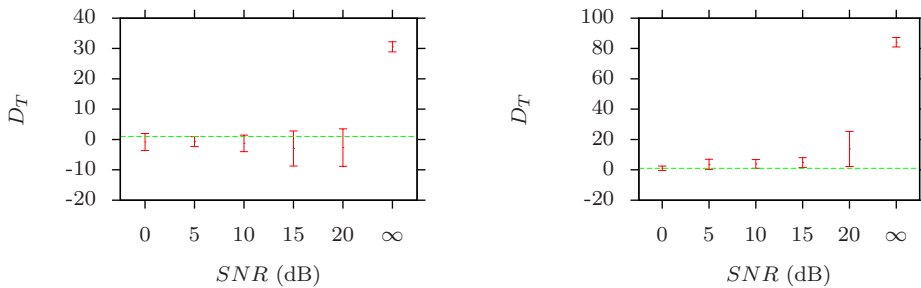


Figura 7.47: Índices de daño  $D_T$  calculados mediante la distancia **euclidean**, de la placa Aluminio con daño por masa M1 añadida en la posición P1, usando el sensor S1 y los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha), con señales obtenidas mediante ensayos experimentales con ruido añadido.

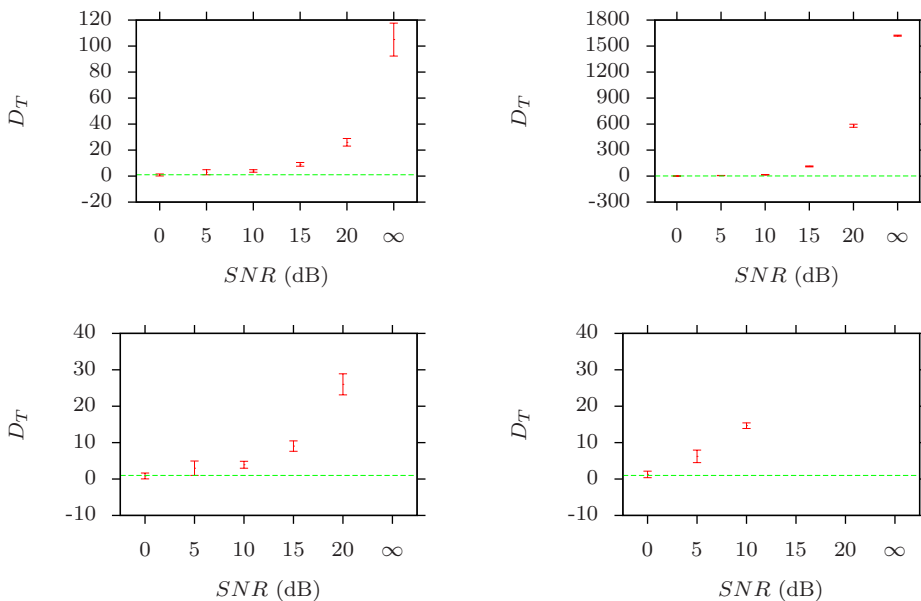


Figura 7.48: Índices de daño  $D_T$  calculados mediante la distancia **spearman**, de la placa Aluminio con daño por masa M1 añadida en la posición P1, usando el sensor S1 y los actuadores A1 (izquierda) y A2 (derecha), con señales obtenidas mediante ensayos experimentales con ruido añadido. Valores totales (arriba) y ampliación (abajo).

## 7.4 Discusión

El análisis en frecuencia de series temporales en placas dañadas nos aporta las siguientes conclusiones:

- Los daños simulados computacionalmente, por ser muy pequeños, apenas cambian la Respuesta en Frecuencia de la placa, y no son detectados en general mediante la técnica empleada en este Capítulo.
- Los daños por masa añadida en ensayos experimentales cambian de forma visible la Respuesta en Frecuencia de la placa, detectándose el daño fácilmente para todas las masas y posiciones.
- Los cambios en la Respuesta en Frecuencia dependen de la posición del daño, ya que diferentes posiciones provocan grandes cambios en diferentes rangos de frecuencias.
- La posición desde la que se excita la placa tiene más influencia en la detección y valoración del daño que la posición desde la que se mide la respuesta.
- Los daños por cambio en las condiciones de contorno en ensayos experimentales cambian de forma visible la Respuesta en Frecuencia de la placa, especialmente para los cambios más grandes, detectándose este daño fácilmente.
- El cambio de temperatura cuando la placa está empotrada provoca un cambio en la Respuesta en Frecuencia de la placa, visible incluso para cambios de pocos grados centígrados. Esto es debido a las tensiones térmicas provocadas por la diferencia entre los coeficientes de dilatación lineal de los materiales del marco rígido (acero) y las placas (aluminio, CFRP). Cuando el coeficiente de dilatación lineal del material de la placa es mayor que el del marco, la placa pierde rigidez al aumentar la temperatura, y cuando es menor, gana rigidez al aumentar la temperatura. Cuando la placa está cuasilibre no se observan corrimientos en los picos de la Respuesta en Frecuencia.
- La distancia `spearman` es más adecuada que las distancias `cityblock` y `euclidean` para detectar daño mediante cambios globales de la Respuesta en Frecuencia, por ser independiente de la normalización aplicada y ser más tolerante al ruido.

# Chapter 8

## Conclusions and future work

### 8.1 Conclusions

This PhD Thesis leads us to the following main conclusions:

- The characterization of the undamaged plates gives good results when comparing the first frequencies obtained with FEM, Ritz method and analysis of the experimental signals, with differences under 3% in almost all cases. The causes of these differences could be imperfections of the plates (rugosity on the surface of CFRP plates, for example), imperfections of the boundary condition, or thermal stresses (in the case of CFRP2 plate).
- The modes computed by FEM and the Ritz method are very similar, except for a couple of modes of the CFRP2 plate.
- The Rayleigh model of damping, as implemented with FEAP, overestimates the damping in the plate, making it impossible to compare the experimental and simulation responses.
- The use of white noise as the exciting signal provides very similar Frequency Response results in the different tests, experimental and in simulation, so that its use to detect damage from changes in global frequency is fully justified. However, the use of sinusoidal signals as the exciting signal in different experimental tests gives different Frequency Response results in amplitude,

meaning that this type of tests is not recommended for detecting damage through global changes in frequency.

- The Frequency Response of the transient signals obtained by FEM simulations using white noise as the exciting signal undergoes a shift in the peak values to lower frequencies with respect to the frequency value obtained by the FEM simulation of modal analysis.
- The Experimental Frequency Response using sinusoidal signals as the exciting signal is dominated by the first harmonics of the excitation frequency. This is not caused either by the plate or by the frame, the cause probably being a misalignment between the PZT used and the plate, or internal misalignment of the PZTs themselves.
- Frequency changes are too small to detect damage, even in the case of substantial damage.
- The mode shape does not change appreciably when viewed with the naked eye for small damage, but it does in some modes for great damage. However, these changes do not allow the location of the damage to be determined in a simple way.
- The Modal Assurance Criterion (MAC) is a valid technique for detecting damage using modal analysis, with modes generated by FEM simulation and the Ritz method, as long as the damage is not too small, in which case it fails. In the case of damage by hole, MAC provides much higher values when the modes are generated by Ritz method modes than in the case of modes generated by FEM, suggesting that in the first case the damage is overestimated. For all other types of damage studied, the MAC values are very similar in both cases. As disadvantages, the MAC needs a large number of modes to make the results reliable, it does not provide information about the location of the damage, and it requires information about the undamaged plate.
- The two-dimensional continuous Wavelet Transform is a valid technique for, through modal analysis, detecting and locating damage by hole and Young's modulus reduction, even for small damage. When increases and decreases in

density and modes are generated by FEM simulation, the results present multiple false negatives (technical failures) in the three modes studied, especially for lower levels of damage. However, when the modes are generated by the Ritz method, the damage is easily located, suggesting again that the damage is overestimated. The main disadvantage of this technique is that it requires information about the undamaged plate, which is not always possible from a practical standpoint.

- The hybrid technique based on the Ritz method and two-dimensional continuous wavelet transform, as proposed in this Thesis, is a valid means for using modal analysis to detect and locate damage by hole and (to a lesser degree) by Young's modulus reduction. However, in general, it is not able to locate the damage in cases of increased or decreased density. This technique presents the great advantage of not requiring information about the undamaged plate.
- Computational simulated damage, being very small, barely changes the Frequency Response of the plate, and is not generally detected by the technique based on frequency analysis of time series presented in this Thesis.
- Added mass damage in experimental tests changes the Frequency Response of the plate in a visible way, and the damage is easily detected for all masses and positions.
- Changes in the Frequency Response depend on the position of the damage, since different positions cause large changes in different frequency ranges.
- The position from which the plate is excited has more influence on the detection and assessment of the damage than the measurement position.
- Damage due to change in the boundary conditions in experimental tests visibly changes the Frequency Response of the plate, especially for the major changes, so the damage is easily detected.
- The change of temperature when the plate is clamped causes a change in the Frequency Response of the plate, visible even for a few degrees Celsius of change. This is due to thermal stresses caused by the difference between

linear expansion coefficients of the rigid frame material (steel) and plate materials (aluminium, CFRP). When the coefficient of linear expansion of the plate material is greater than the frame, the plate loses stiffness when the temperature increases, whereas when it is lower, it gains rigidity when the temperature increases. When the plate is quasi-free, no shifts in the peaks of the frequency response are observed.

- The `spearman` distance is more appropriate than `cityblock` and `euclidean` distances to detect damage by global changes in the Frequency Response, it being independent of the applied normalization and more tolerant of noisy signals.

## 8.2 Future work

As stated in Section 1.5, this is the first Thesis about damage detection in plates developed within our research group, and it leaves many more open doors than closed ones. After defending his thesis, the candidate plans to continue his research in Portugal, as part of a collaborative research project between the INEGI (*Instituto de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial*) in Porto and the IST (*Instituto Superior Técnico*) in Lisbon, through an understanding of numerical methods suitable for detecting damage. At the same time, maintaining contact with the SNADS group, the PhD student appears to be responsible for project ‘AULamb’, recently requested under the National *I+D+i* Plan. This project involves the detection of damage in CFRP materials using techniques based on Lamb waves from a computational and experimental approach, and it stands as a natural continuation of the work developed in this Thesis.

Regardless of the outcome of the above research project, this Thesis leaves many possibilities open for further research, which are explained below.

With respect to the experimental tests, the following options are suggested:

- Adapt the frame using a CFRP2 plate in order to apply the whole experimental protocol.
- Repeat the test of Section 5.2.3 with a better temperature control of the room.

- Implement different boundary conditions, in particular the two opposite longer edges free and the two shortest edges clamped, in search of greater values of transversal displacement.

Regarding the numerical simulations with FEM, the following possibilities are suggested:

- Look for new implementations of the damping coefficients, in order to obtain better results when comparing experimental and numerical simulations.
- Implement a more realistic model of the CFRP2 plate.

With respect to the calculations using the Ritz method, the following possibilities are suggested:

- Implement a more realistic model of the CFRP2 plate.
- Implement the continuity conditions in the case of plates with different zones (CFRP2 and plates with defects).
- Implement different compatible boundary condition functions ( $X_m(x)$ ,  $Y_n(y)$ ) in order to compare the accuracy of the results.
- Implement advanced plate theories (Mindlin, etc.) and non-midplane plates.

Respect to the calculations using the Ritz method, the following possibilities are suggested:

- Implement a more realistic model of the CFRP2 plate.
- Implement the continuity conditions in the case of plates with different zones (CFRP2 and plates with defects).
- Implement different compatible boundary condition functions ( $X_m(x)$ ,  $Y_n(y)$ ) in order to compare the accuracy of the results.
- Implement advanced plate theoris (Mindlin, etc.) and non-midplane plates.

With regard to damage detection using Wavelet Transform, the following possibilities are suggested:

- Look for new implementations of signal extension methods, in order to minimize the edge effect shown in Section 6.4.1
- Use of different Wavelet mother functions, comparing the results with the ones described in this Thesis.
- Study of the same damage with different boundary conditions, in order to analyze which is the best boundary condition for damage detection.

Regarding the damage detection using the Frequency Response analysis, the following possibilities are suggested:

- Study of the same damage with different boundary conditions, in order to determine the best boundary condition for damage detection.
- Numerical study of damages in the same order of magnitude than the experimental ones (for added mass).

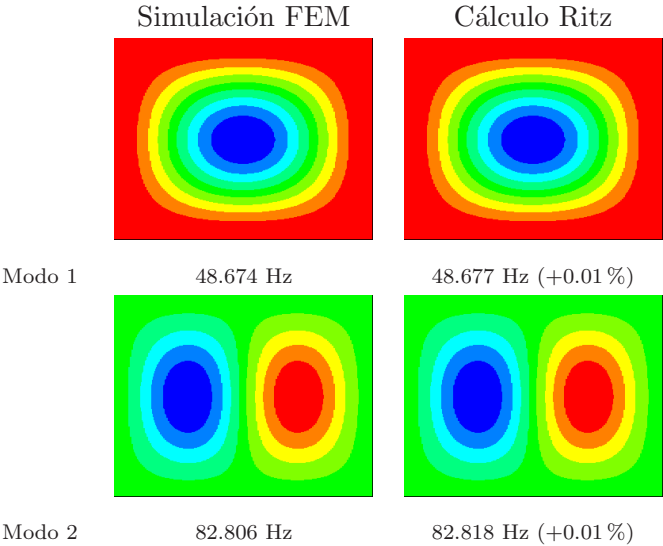


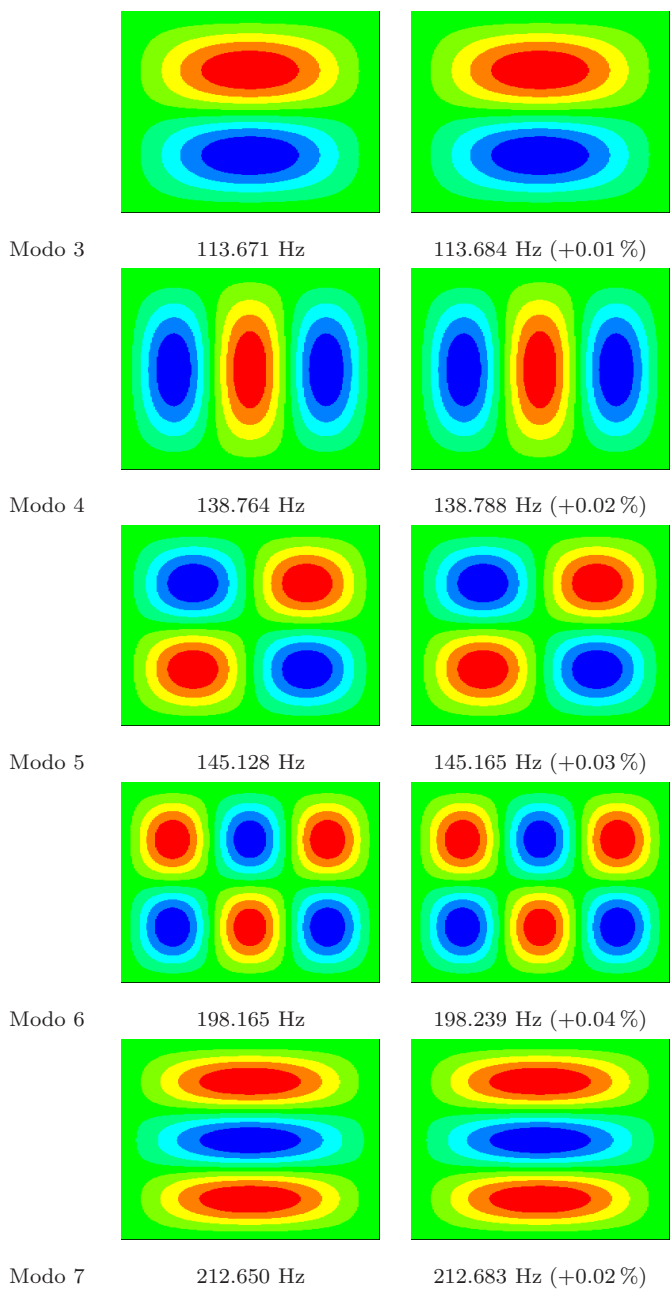
# Apéndice A

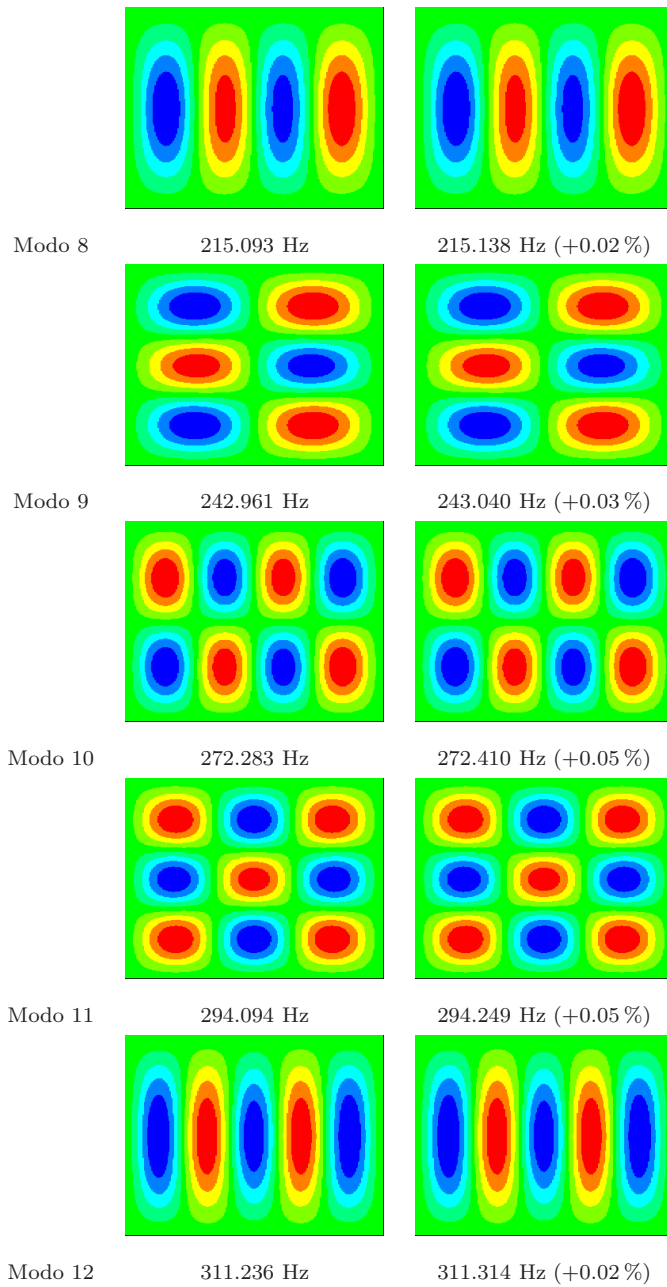
## Modos de vibración

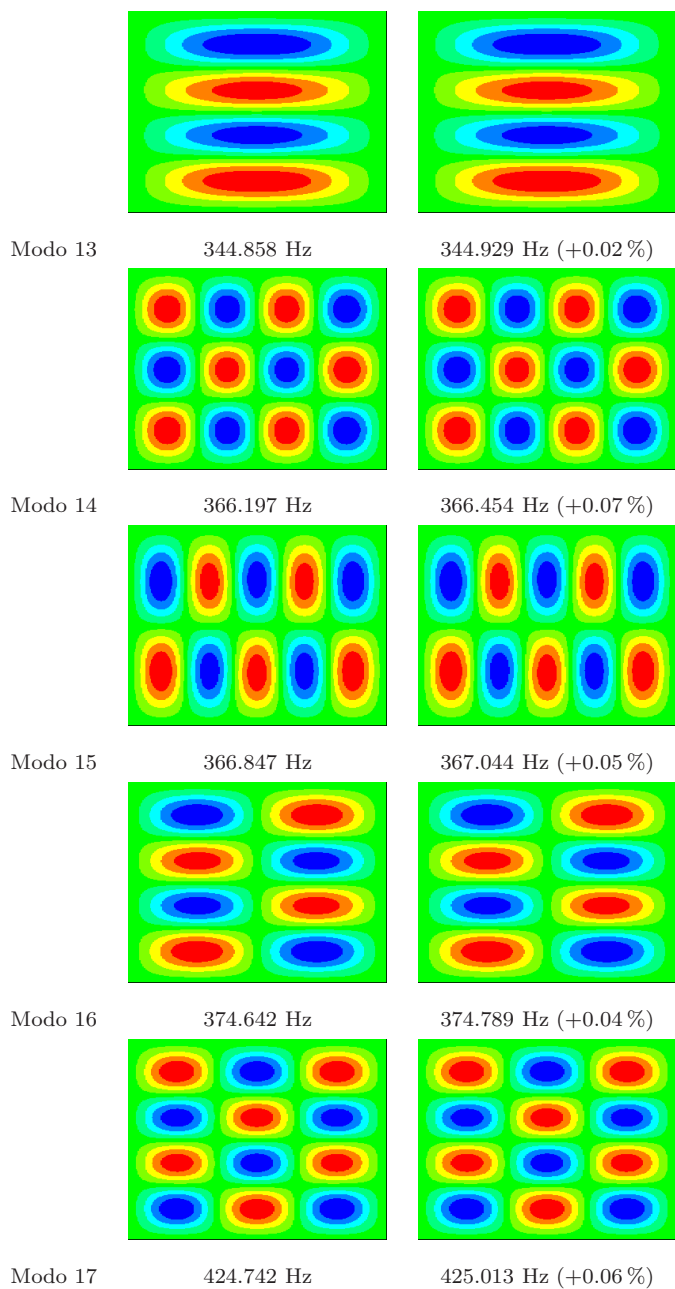
### A.1 Placa Aluminio sin daño

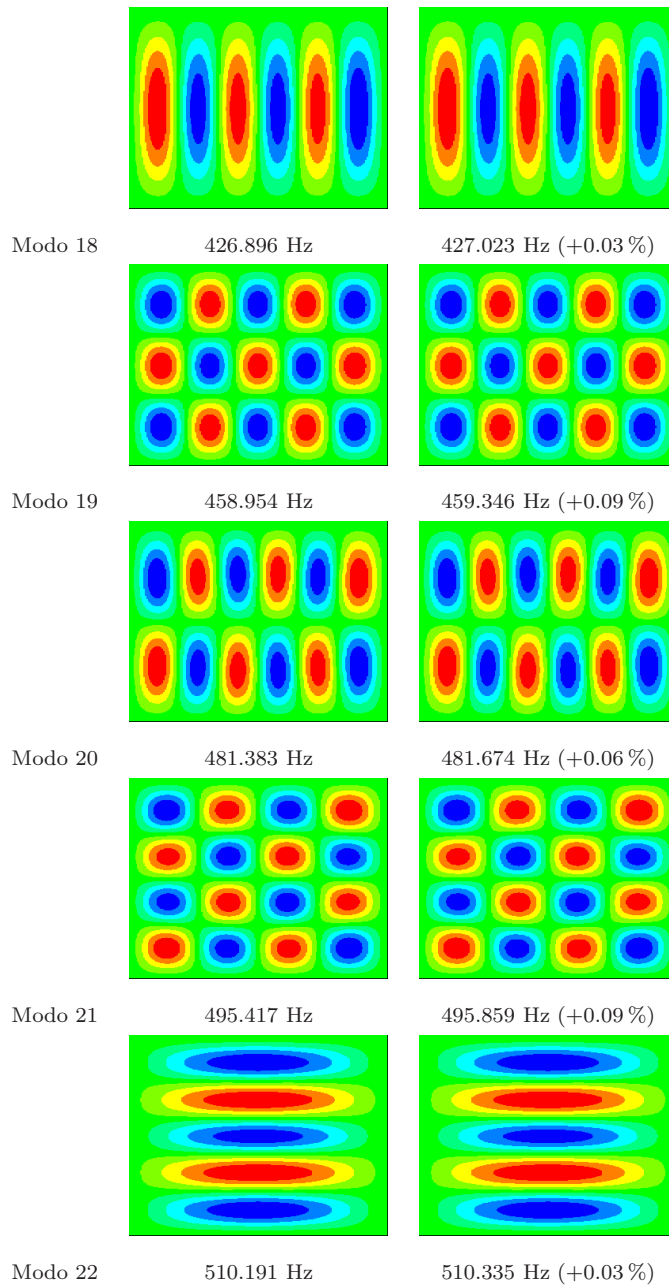
En la Tabla A.1 se pueden observar los primeros 25 modos de vibración de la placa Aluminio sin daño, calculados mediante simulación FEM y mediante el método de Ritz, junto a sus correspondientes frecuencias y la diferencia porcentual entre ellas. Se puede observar que los modos son prácticamente idénticos a simple vista, así como que las frecuencias son muy parecidas, con una diferencia máxima de +0.10 % para el modo 25.











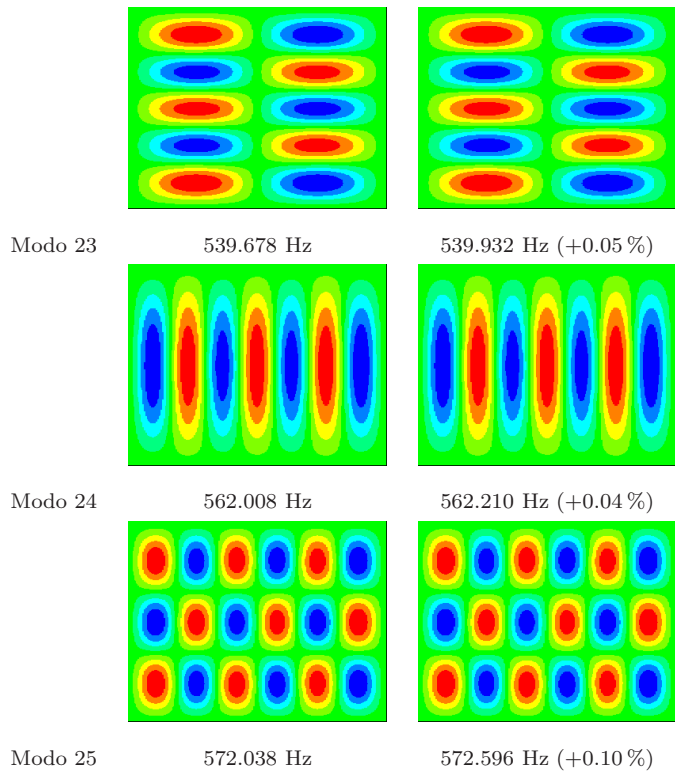
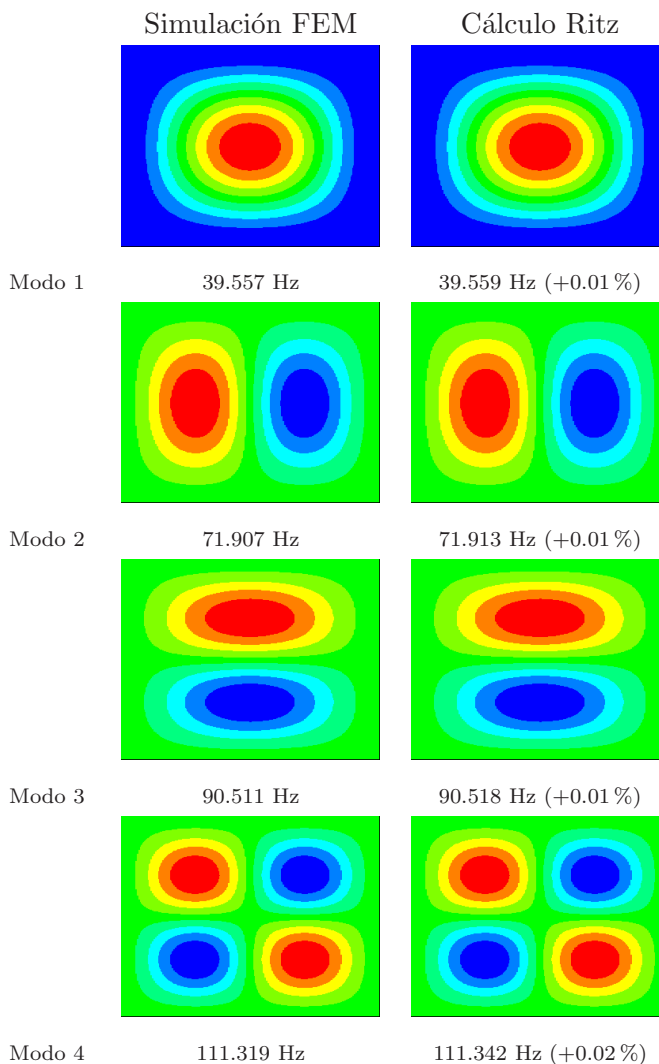
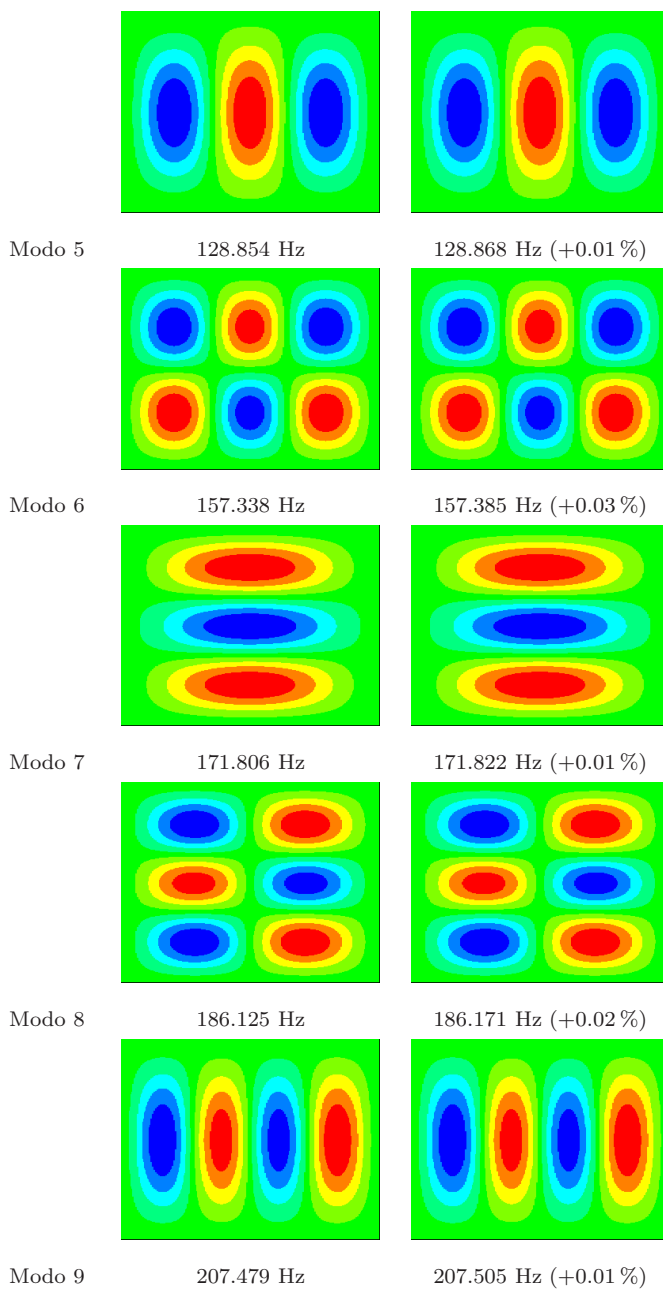


Tabla A.1: Comparación FEM-Ritz de los modos de vibración y sus correspondientes frecuencias para la placa Aluminio sin daño.

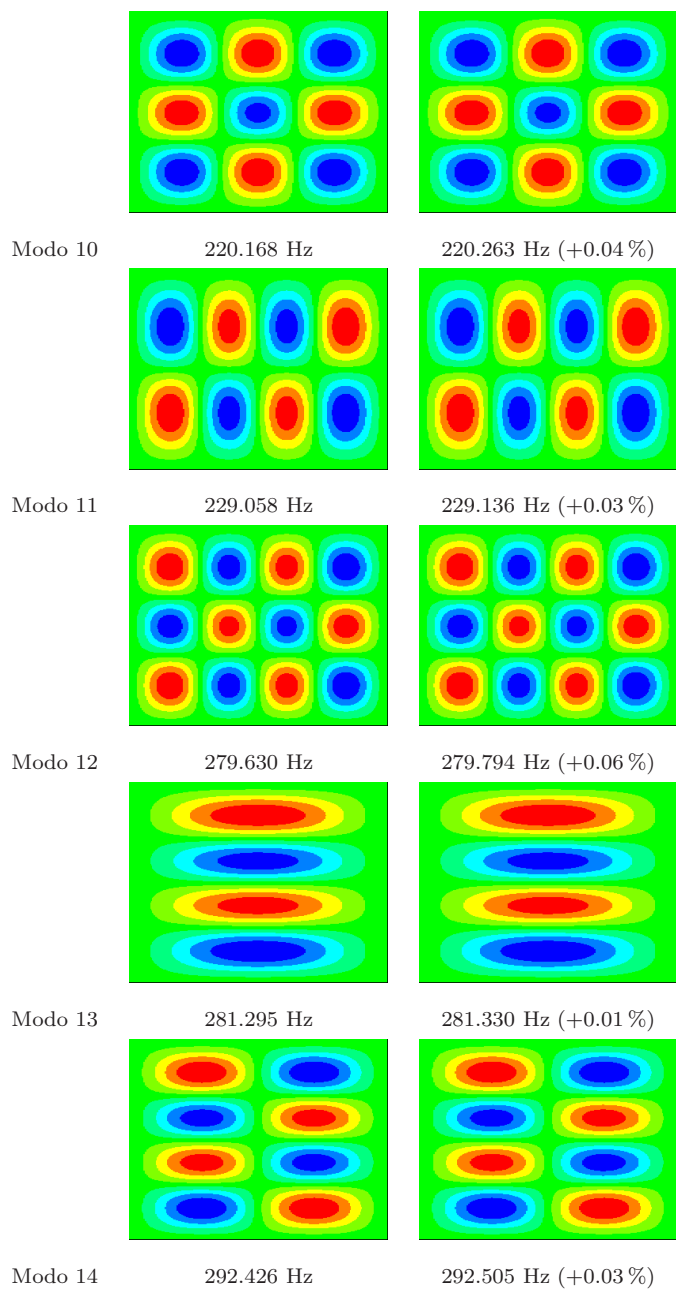
## A.2 Placa CFRP1 sin daño

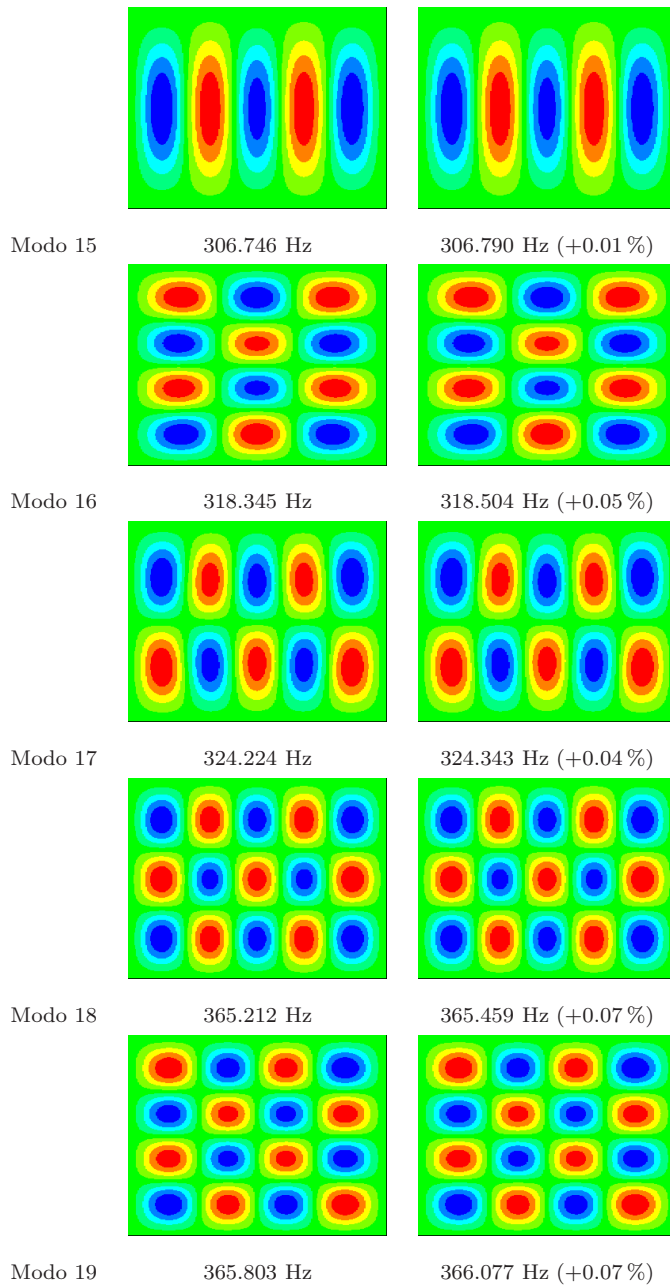
En la Tabla A.2 se pueden observar los primeros 25 modos de vibración de la placa CFRP1 sin daño, calculados mediante simulación FEM y mediante el método de Ritz, junto a sus correspondientes frecuencias y la diferencia porcentual entre ellas. Se puede observar que los modos son practicamente idénticos a simple vista, así como que las frecuencias son muy parecidas, con una diferencia máxima de +0.10% para el modo 23.

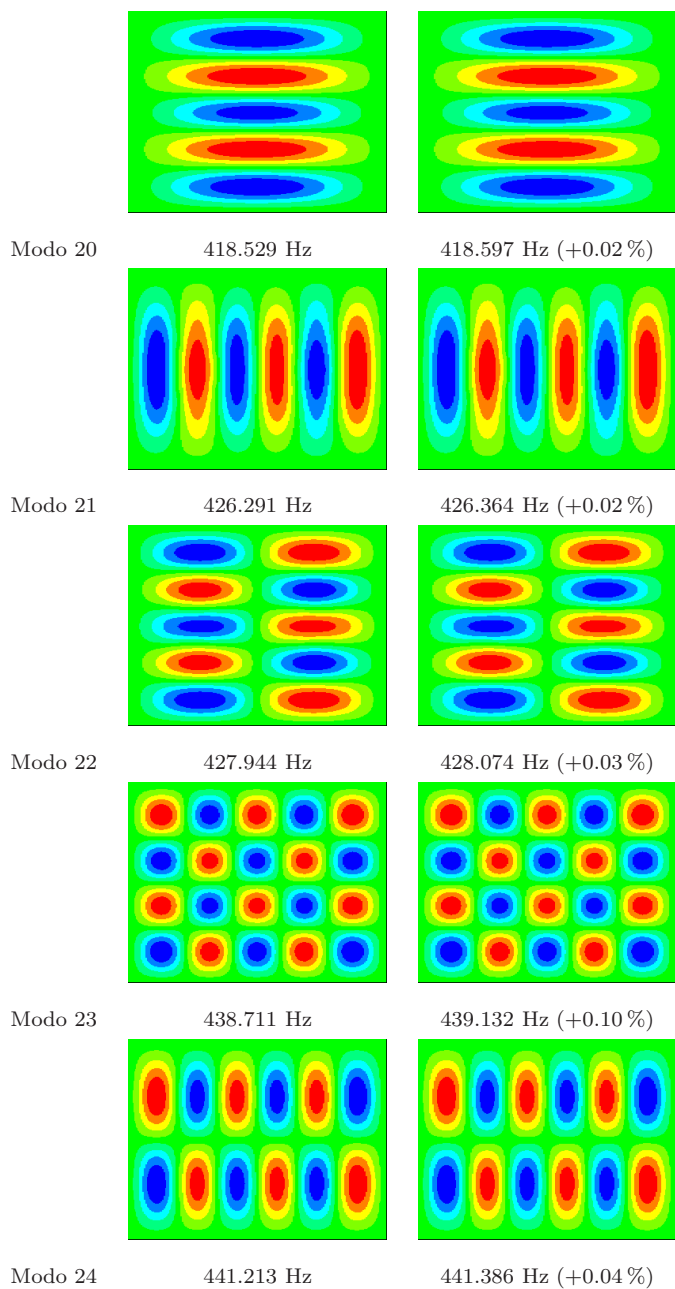


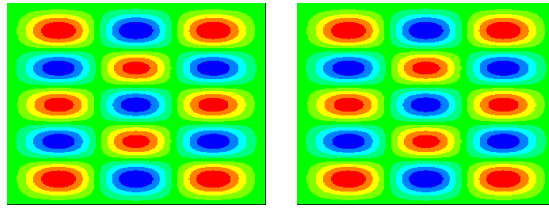












Modo 25

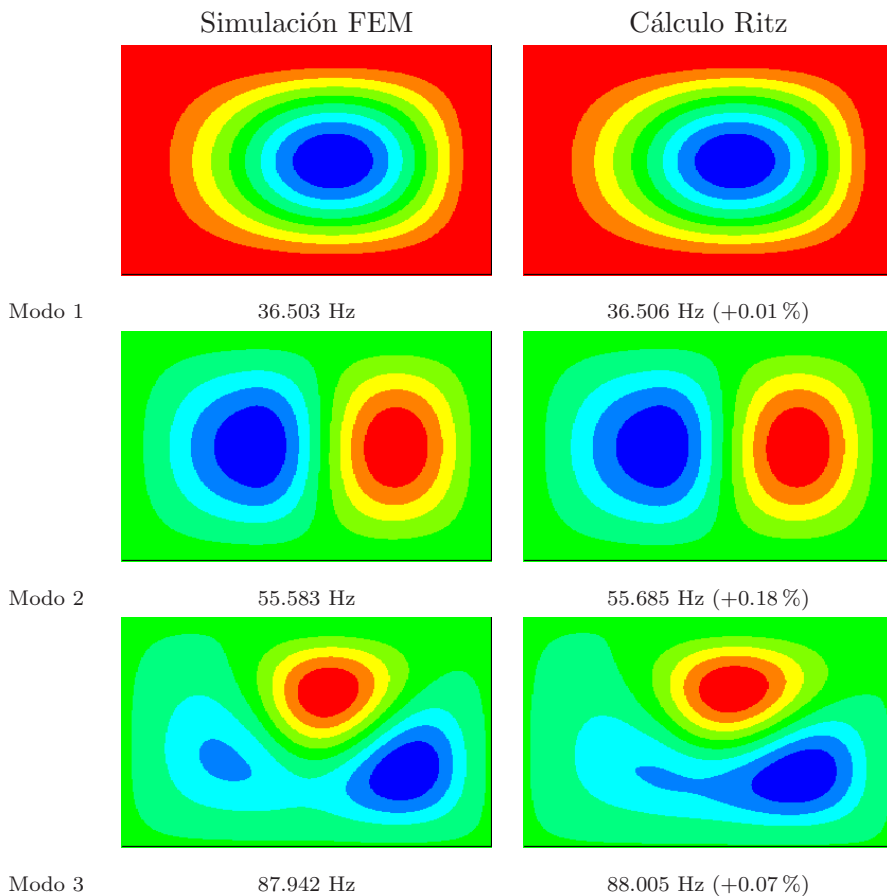
448.903 Hz

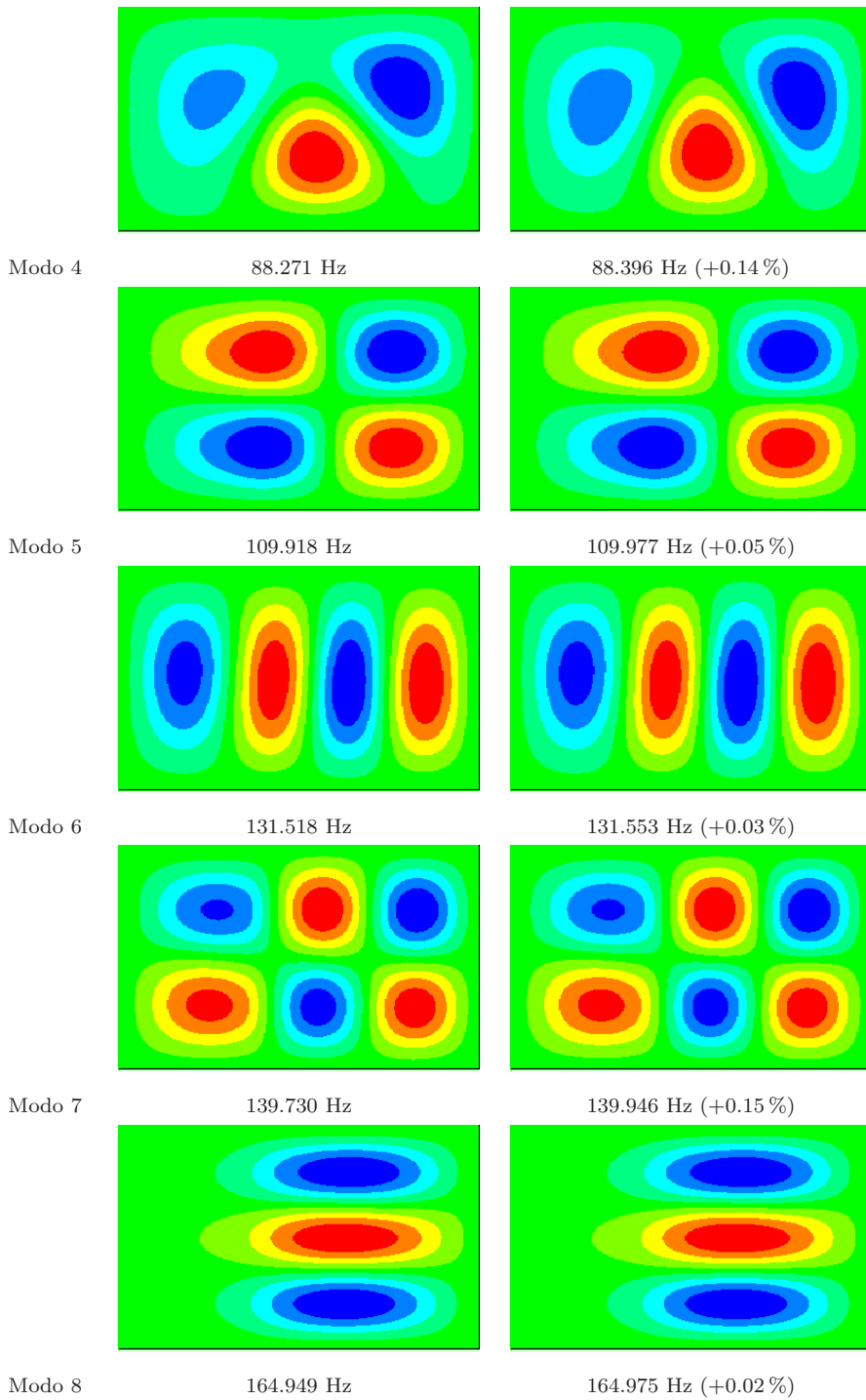
449.145 Hz (+0.05 %)

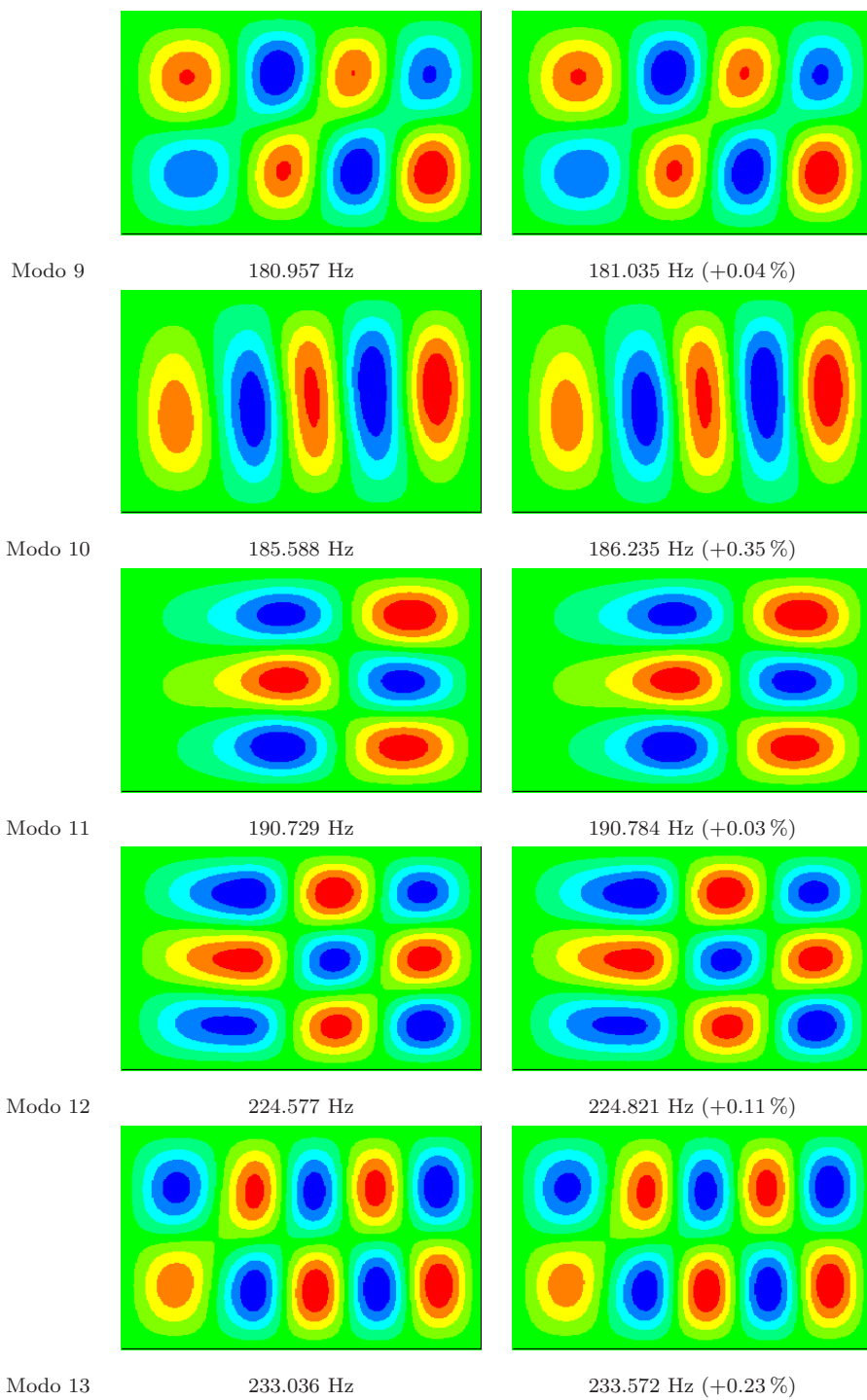
Tabla A.2: Comparación FEM-Ritz de los modos de vibración y sus correspondientes frecuencias para la placa CFRP1 sin daño.

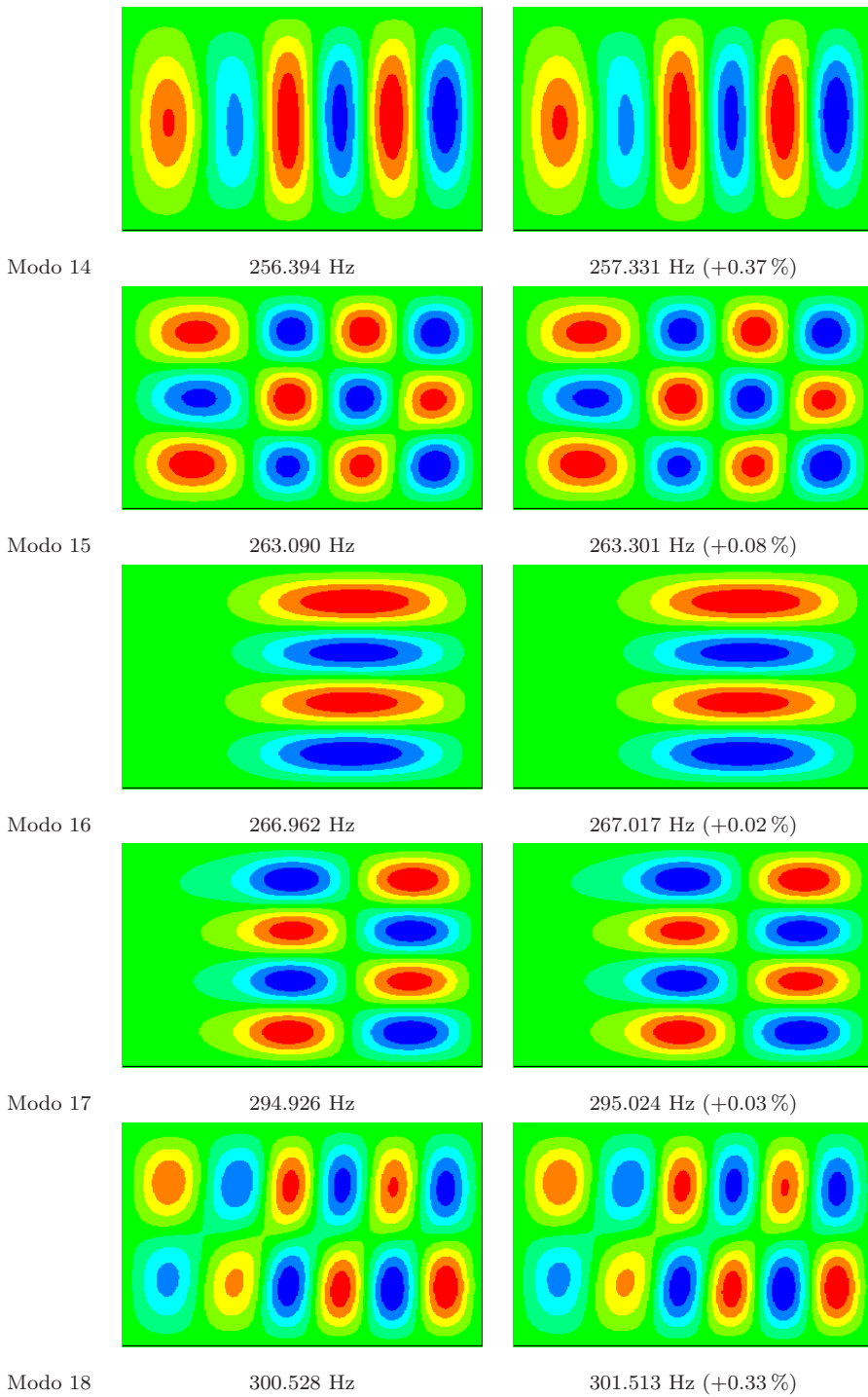
### A.3 Placa CFRP2 sin daño

En la Tabla A.3 se pueden observar los primeros 25 modos de vibración de la placa CFRP2 sin daño, calculados mediante simulación FEM y mediante el método de Ritz, junto a sus correspondientes frecuencias y la diferencia porcentual entre ellas. Se puede observar que la mayoría de los modos son prácticamente idénticos a simple vista. Sin embargo en algunos se observan pequeñas diferencias, como por ejemplo en los modos 3 y 4. Las frecuencias presentan unas diferencias un poco mayores que en las otras placas, siendo la máxima de +0.37% para el modo 14.

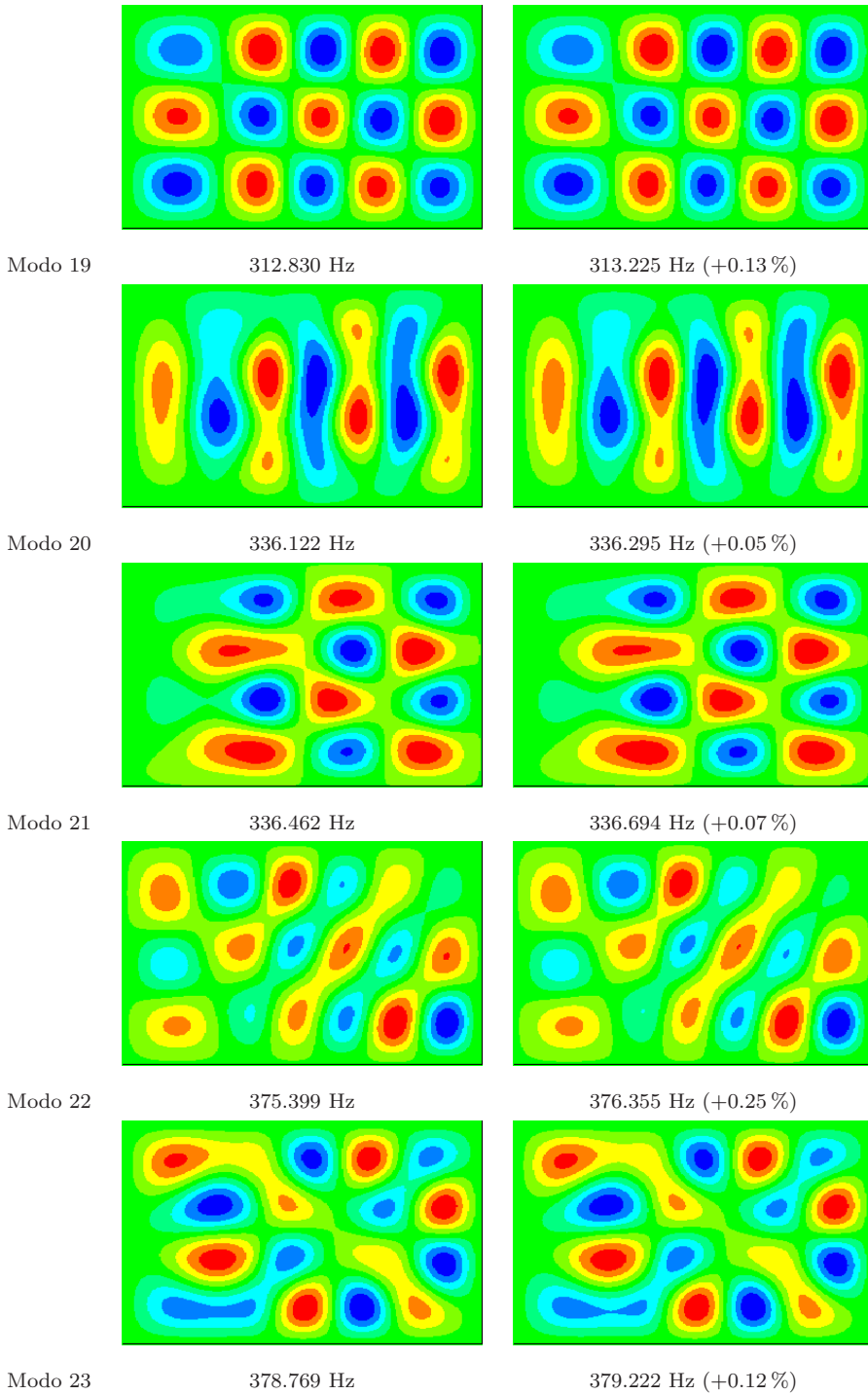












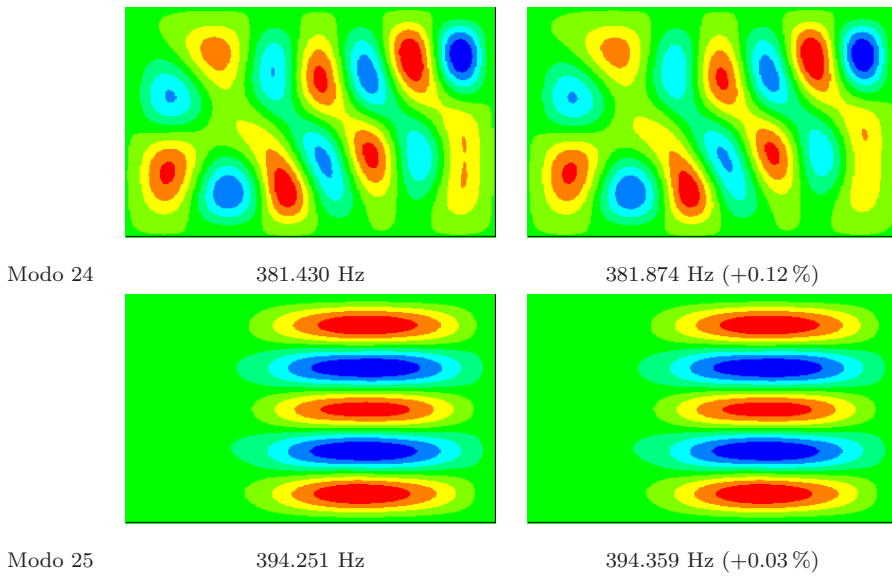
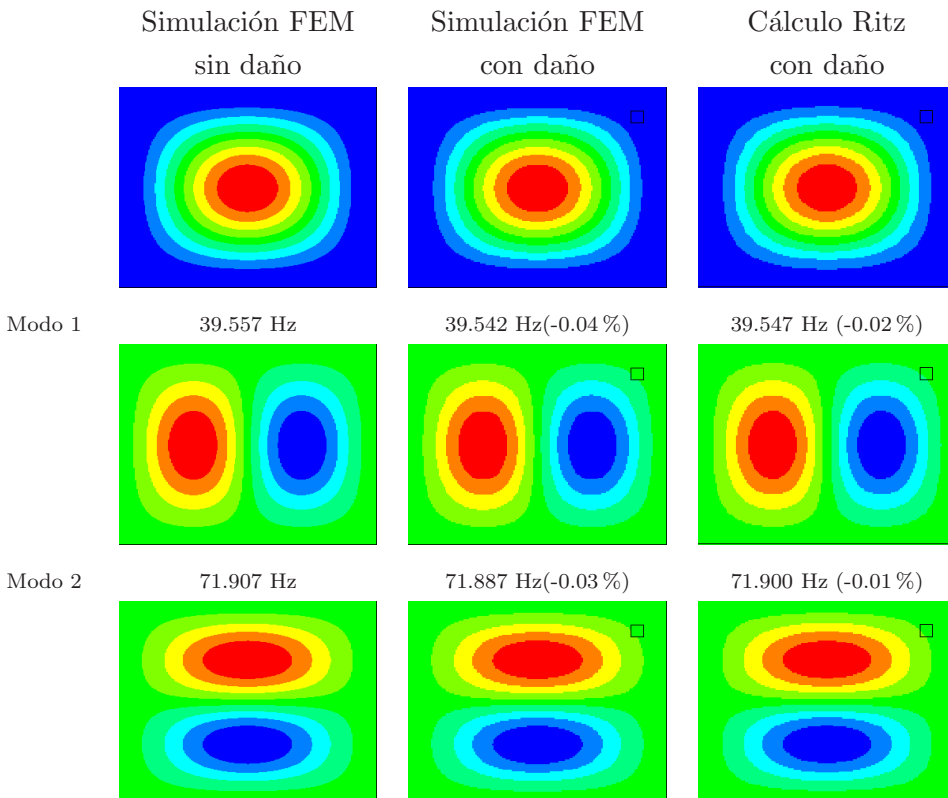
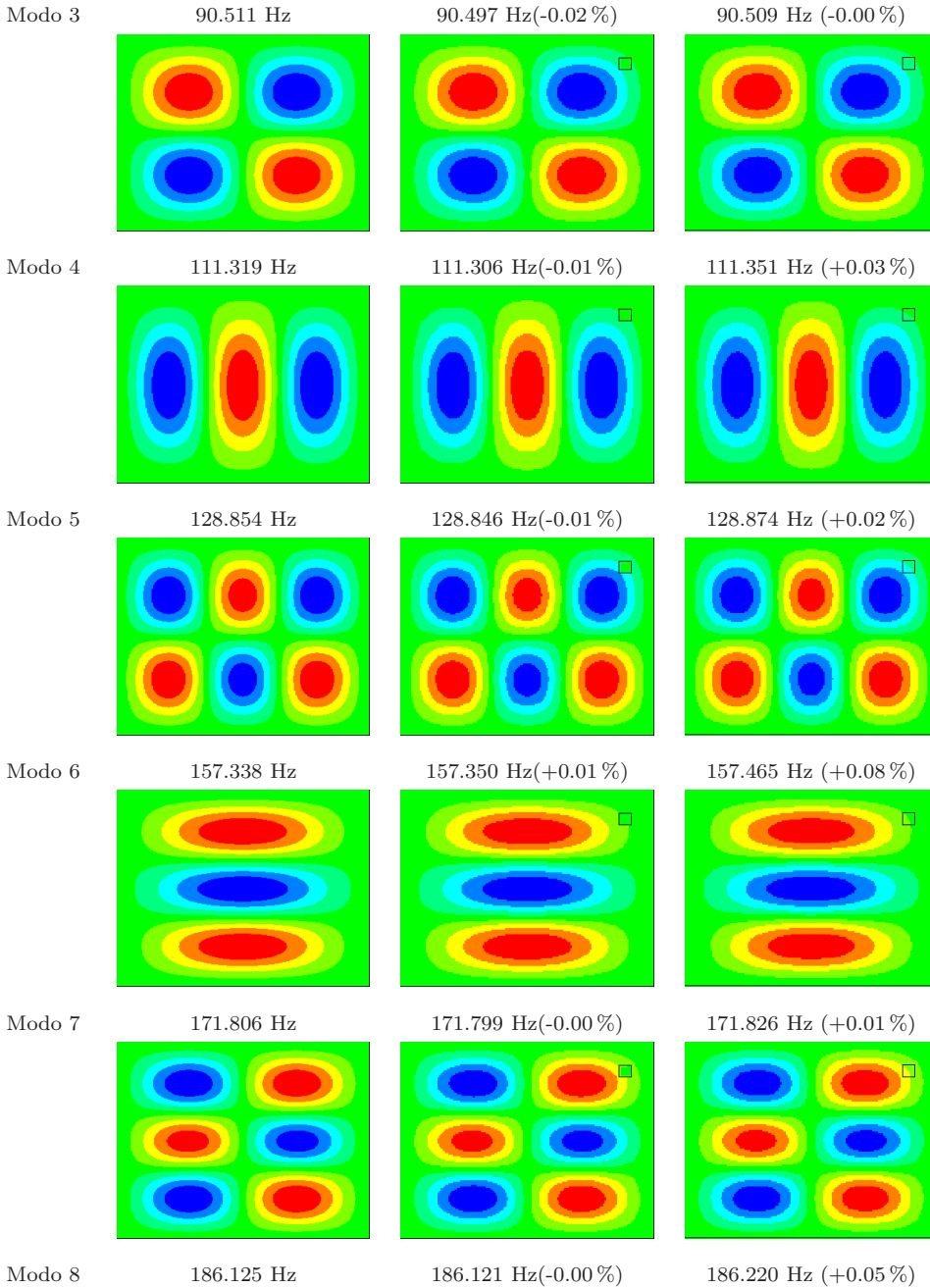


Tabla A.3: Comparación FEM-Ritz de los modos de vibración y sus correspondientes frecuencias para la placa CFRP2 sin daño.

## A.4 Placa CFRP1 con daño por agujero de 4 cm en la posición P3

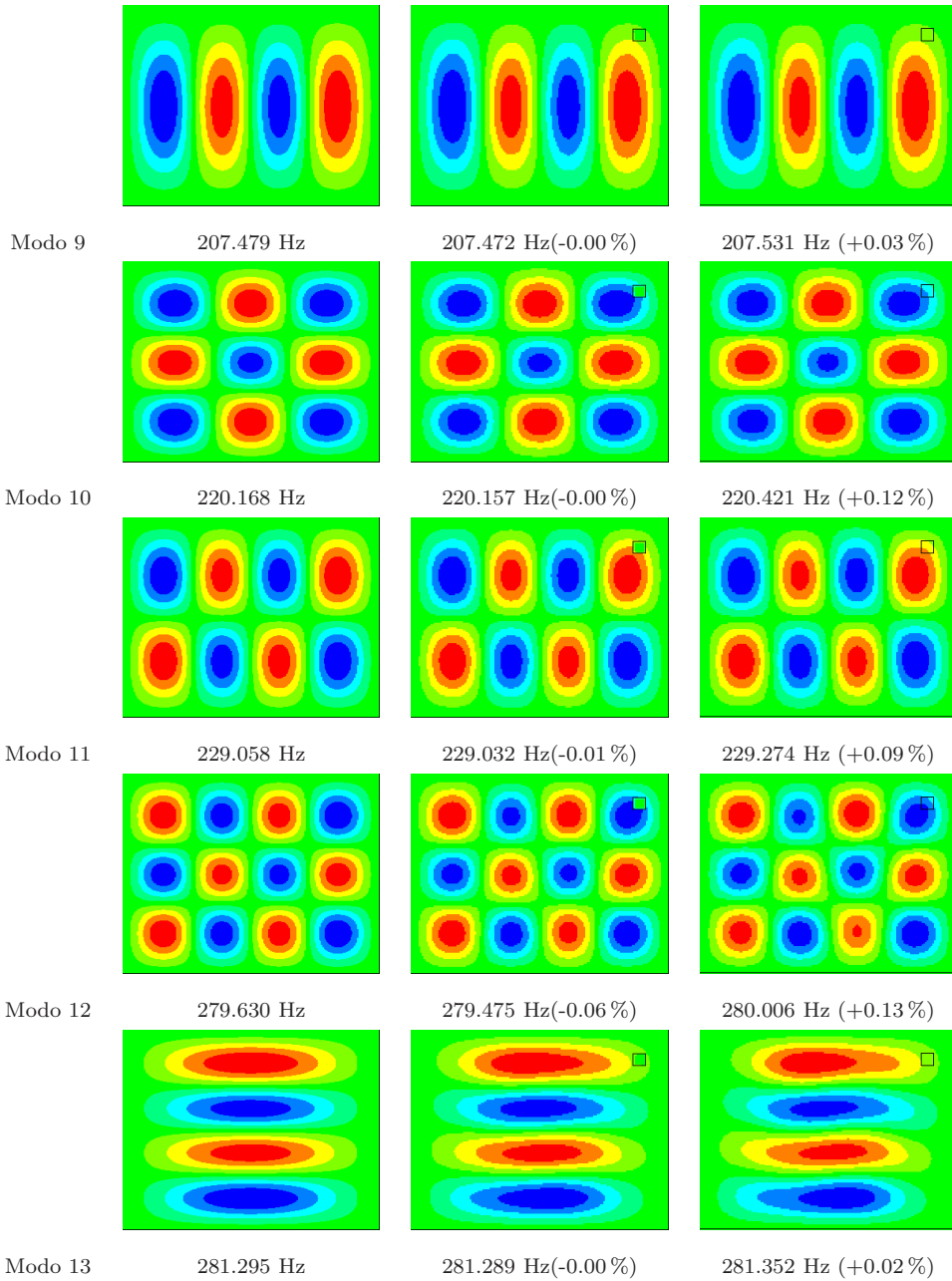
En la Tabla A.4 se pueden observar los primeros 25 modos de vibración de la placa CFRP1 con daño por agujero de 4 cm en la posición P3, calculados mediante simulación FEM y mediante el método de Ritz, comparados con los modos de la placa sin daño calculados mediante simulación FEM, junto a sus correspondientes frecuencias y la diferencia porcentual entre ellas. Se observan diferencias apreciables a simple vista en la forma de algunos modos, como el 13, 16, 17, 24 (este último principalmente con el método de Ritz), y diferencias bastante significativas en otros, como el 18, 19, 21, 22 y 23. En las frecuencias, sin embargo, las diferencias son muy pequeñas, siendo la mayor de +0.17% (modo 19, con Ritz). Centrándose solo en simulación FEM, la mayor diferencia es de -0.15%, para el modo 23. Todas las frecuencias disminuyen su valor con este daño.

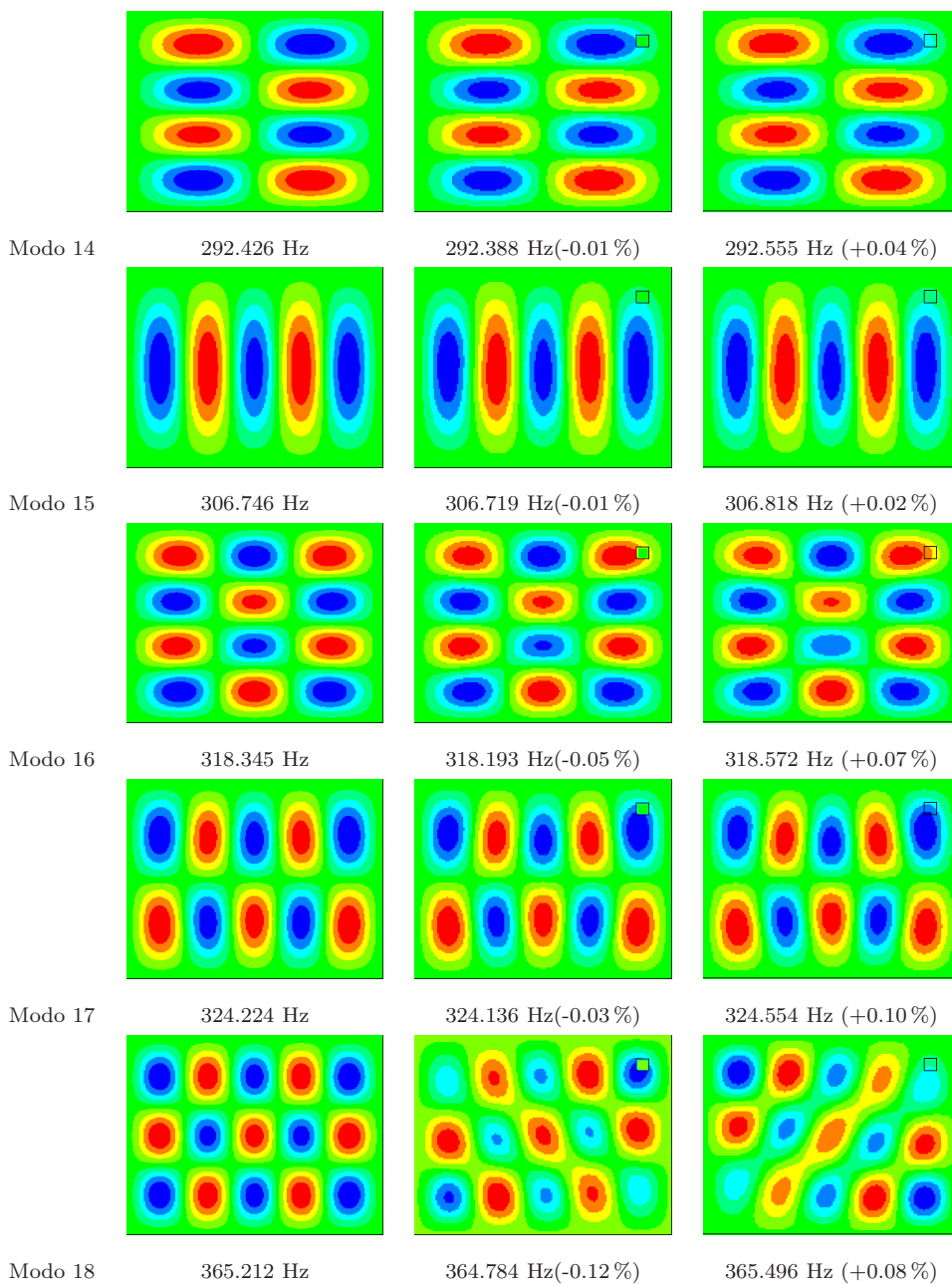


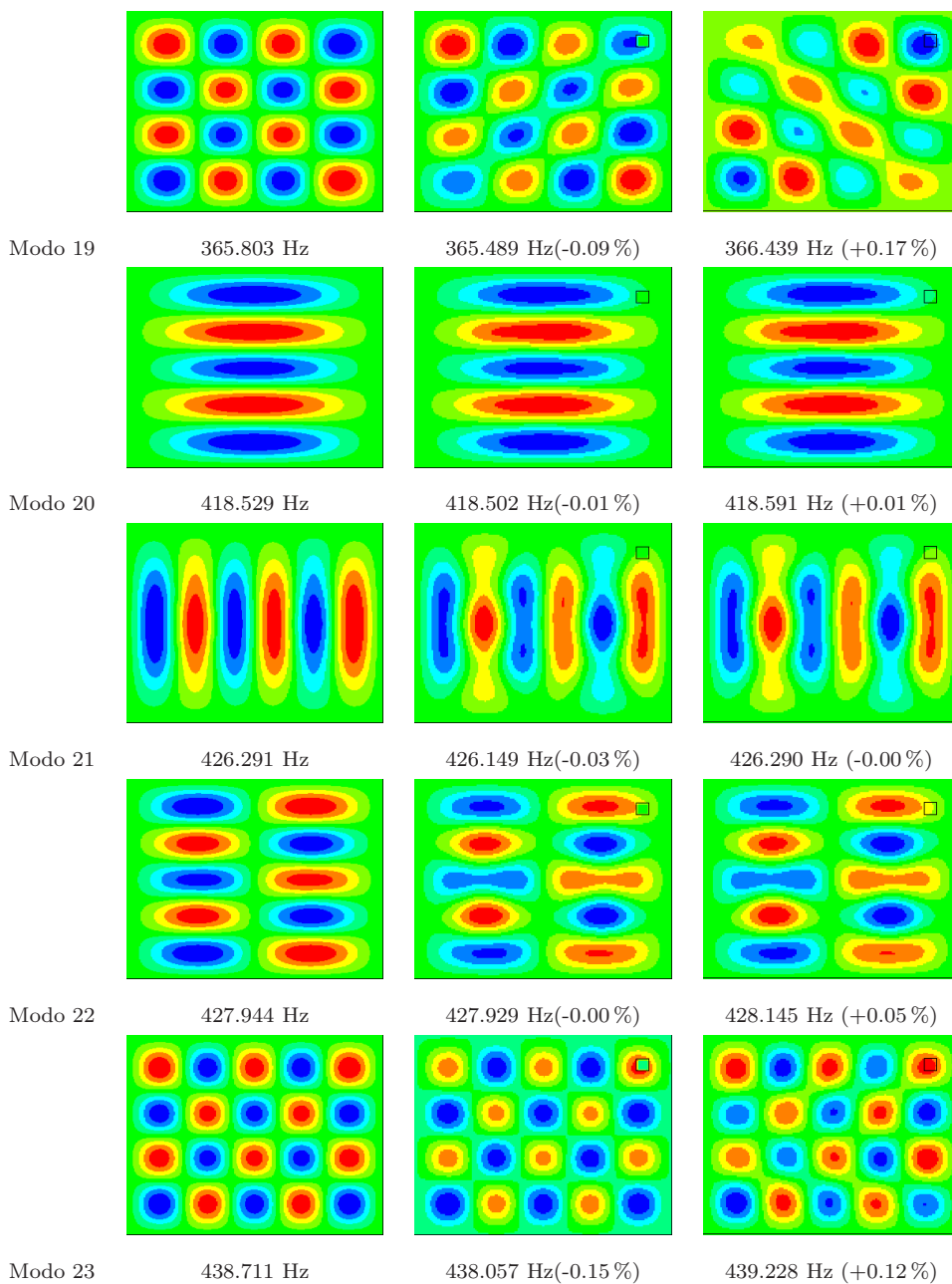


A.4. Placa CFRP1 con daño por agujero de 4 cm en la posición P3

---







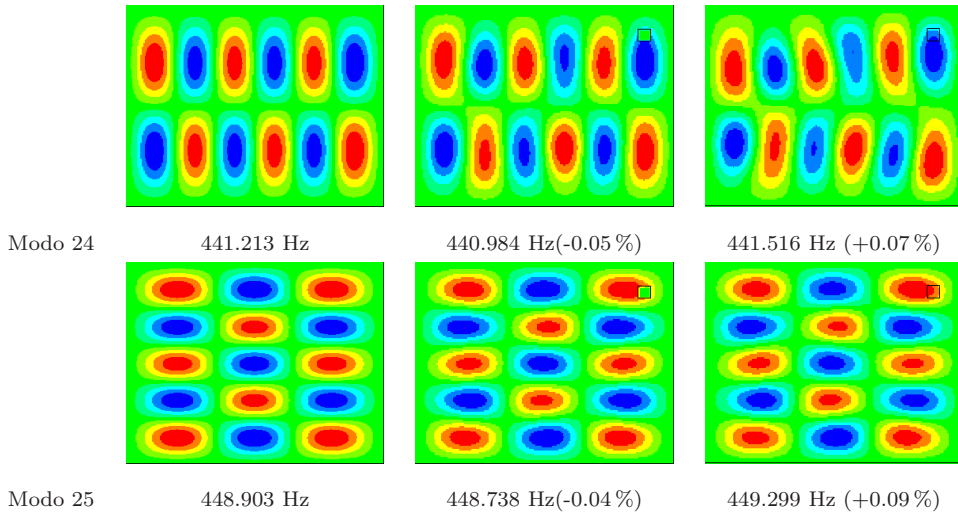
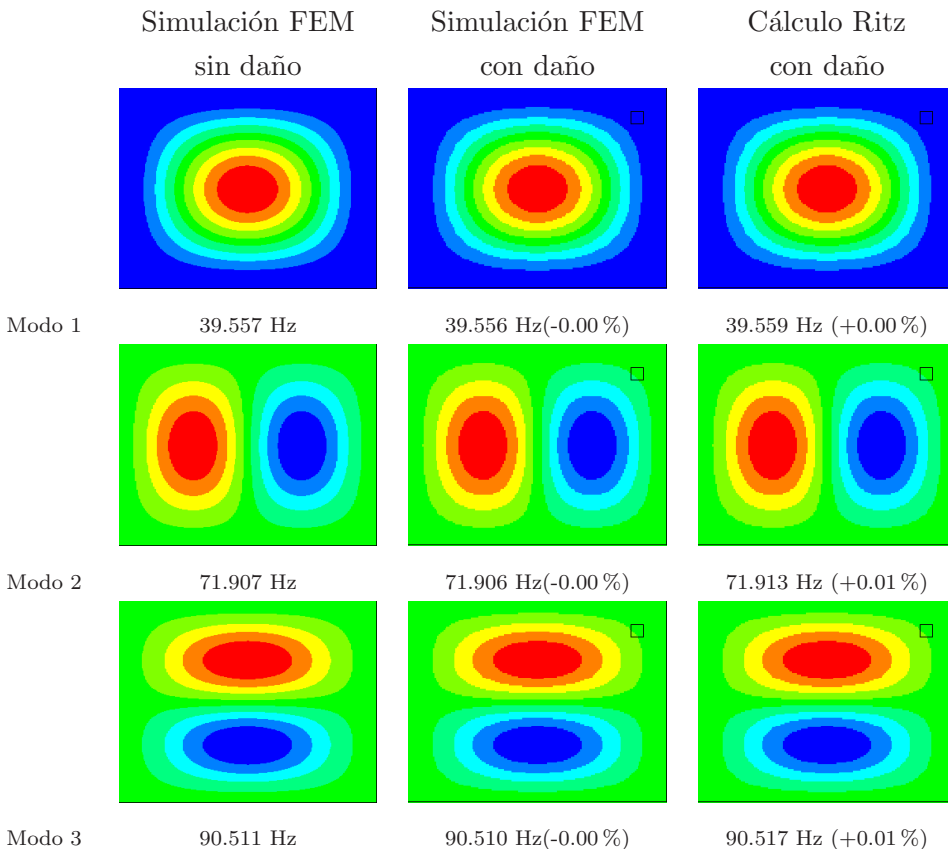


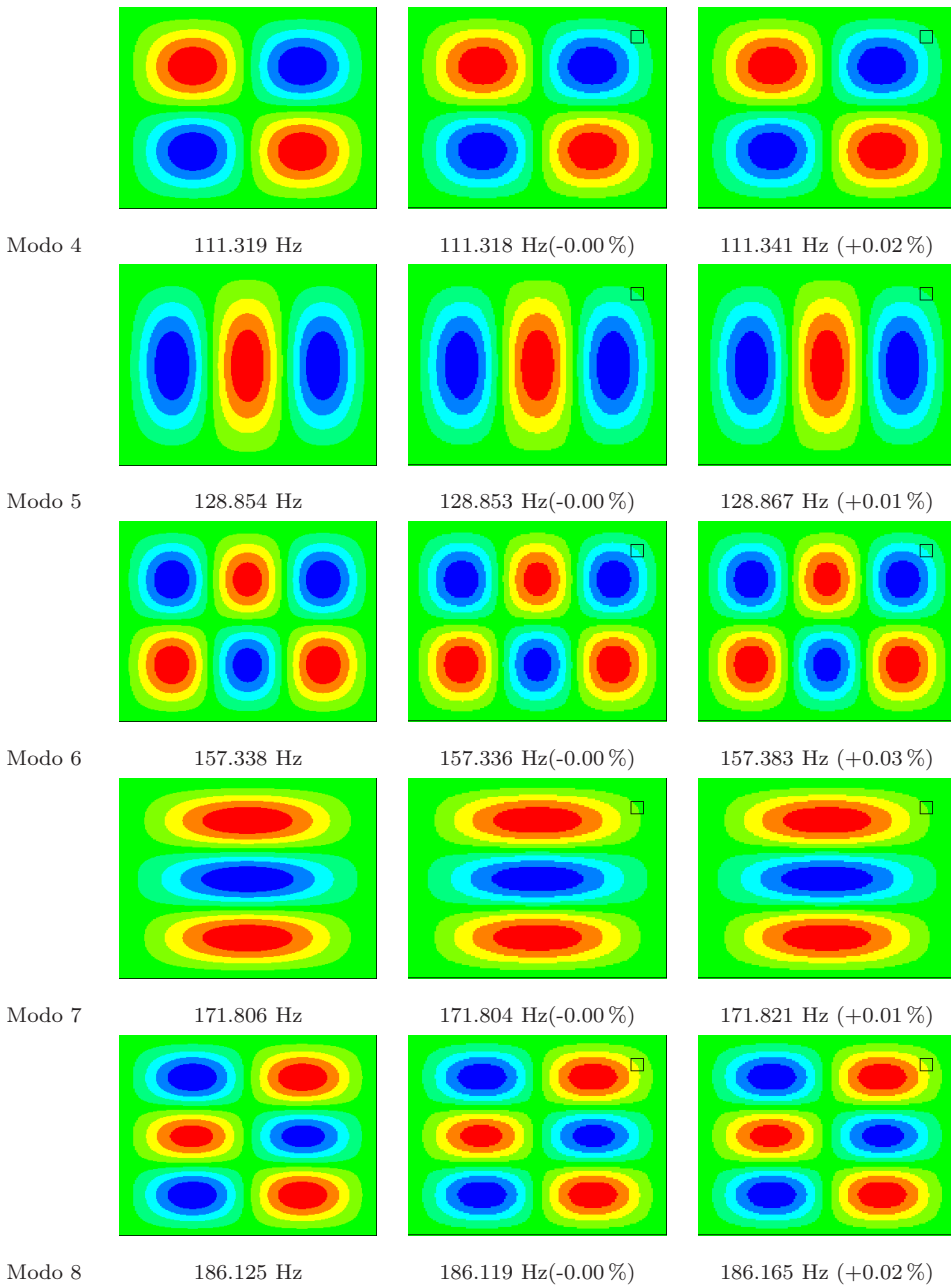
Tabla A.4: Comparación FEM (sin daño)-FEM-Ritz (con daño) de los modos de vibración y sus correspondientes frecuencias para la placa CFRP1 con daño por agujero de 4 cm centrado en la posición P3.



## A.5 Placa CFRP1 con daño por disminución en ambos módulos de Young (-10%)

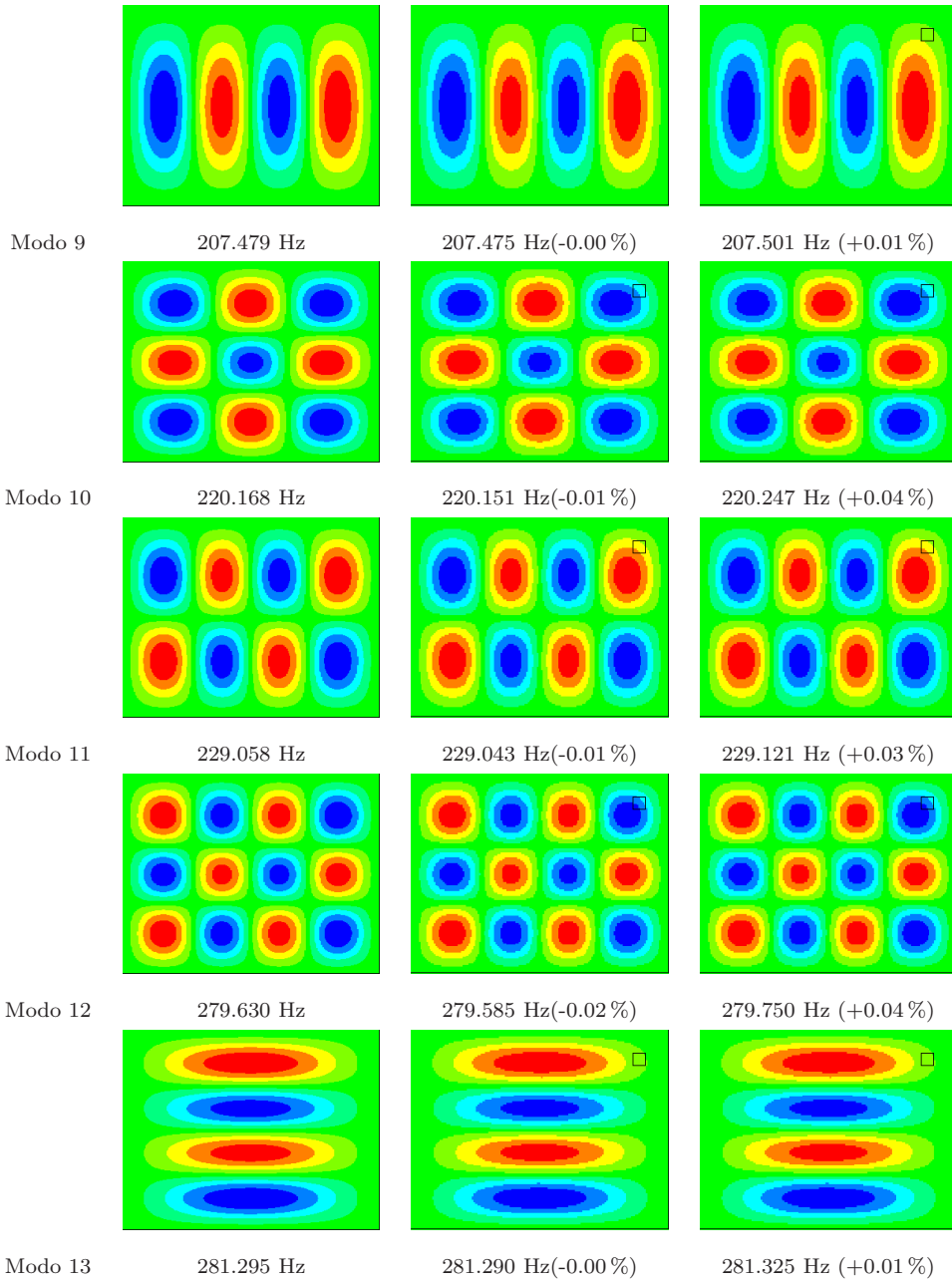
En la Tabla A.5 se pueden observar los primeros 25 modos de vibración de la placa CFRP1 con daño por disminución en ambos módulos de Young (-10%) en la posición P3, calculados mediante simulación FEM y mediante el método de Ritz, comparados con los modos de la placa sin daño calculados mediante simulación FEM, junto a sus correspondientes frecuencias y la diferencia porcentual entre ellas. Las únicas diferencias apreciables a simple vista son en los modos 18 y 19. En las frecuencias, sin embargo, la mayor diferencia es +0.06%, para el modo 23 (menor que la diferencia FEM-Ritz en el caso sin daño). Centrándose solo en simulación FEM, la mayor diferencia es de -0.04%, también para el modo 23. Todas las frecuencias disminuyen su valor con este daño.

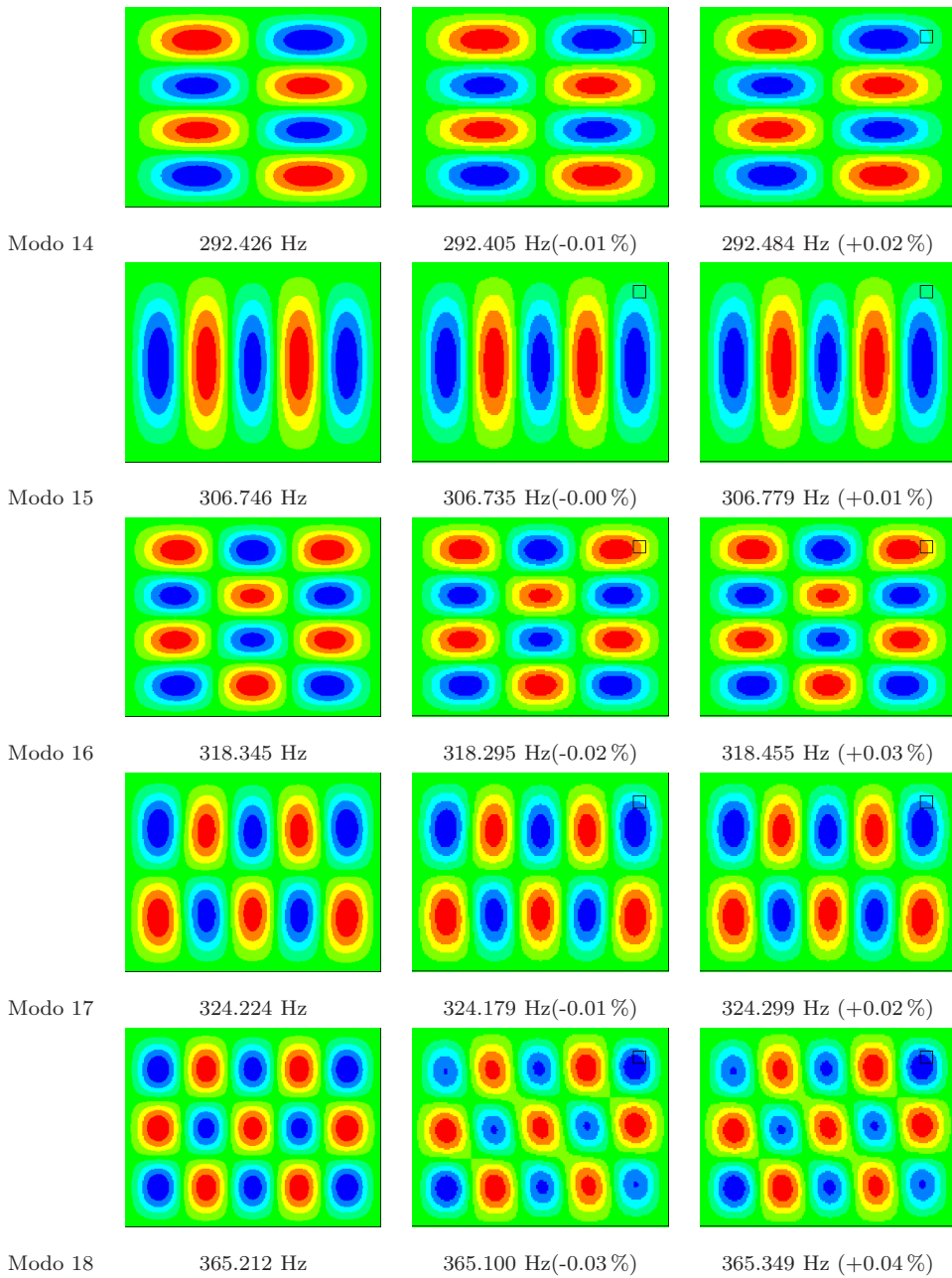




A.5. Placa CFRP1 con daño por disminución en ambos módulos de Young (-10%)

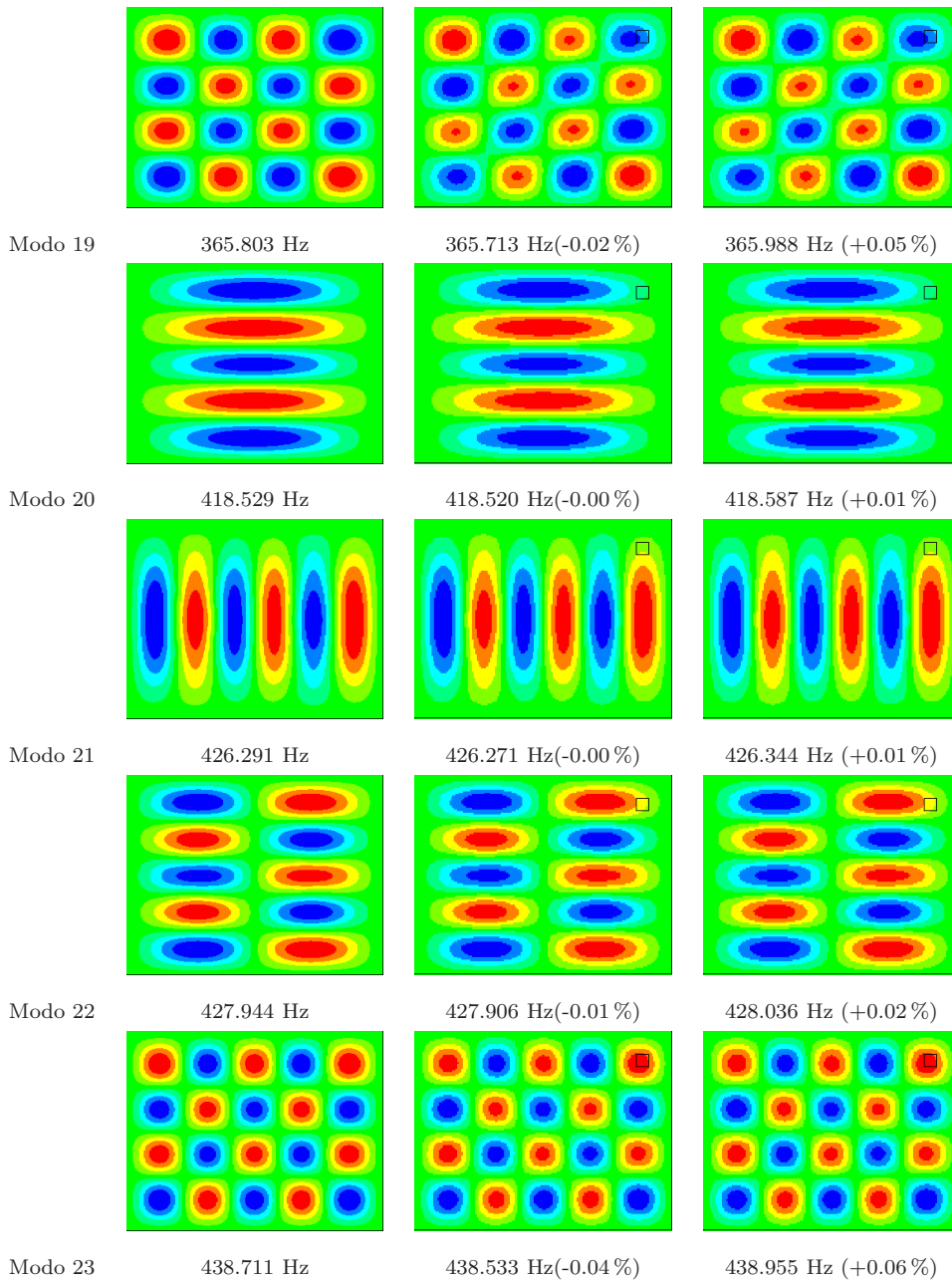
---





A.5. Placa CFRP1 con daño por disminución en ambos módulos de Young (-10%)

---



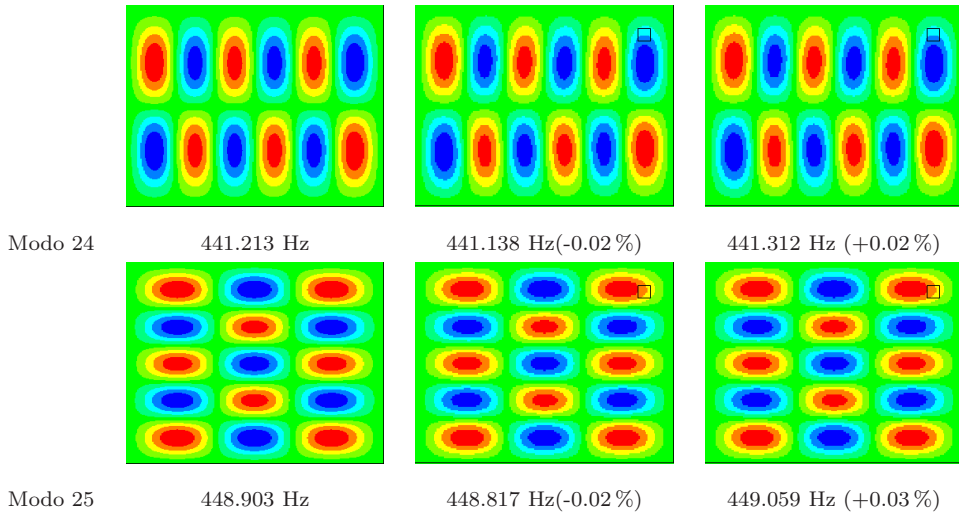
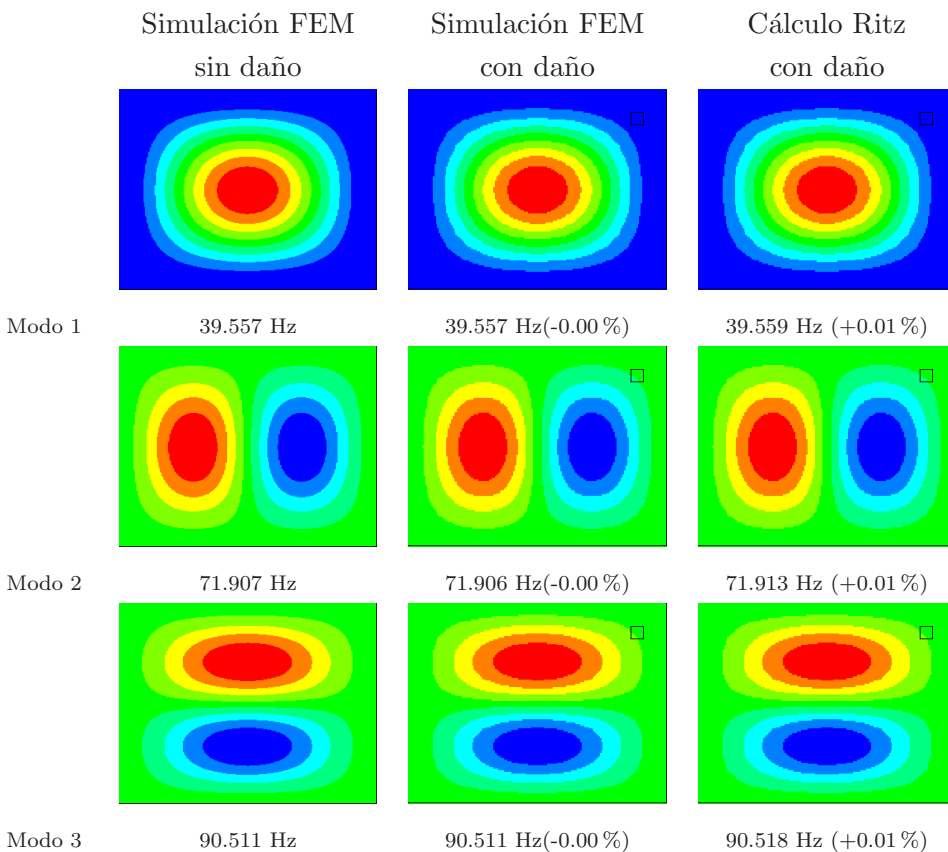
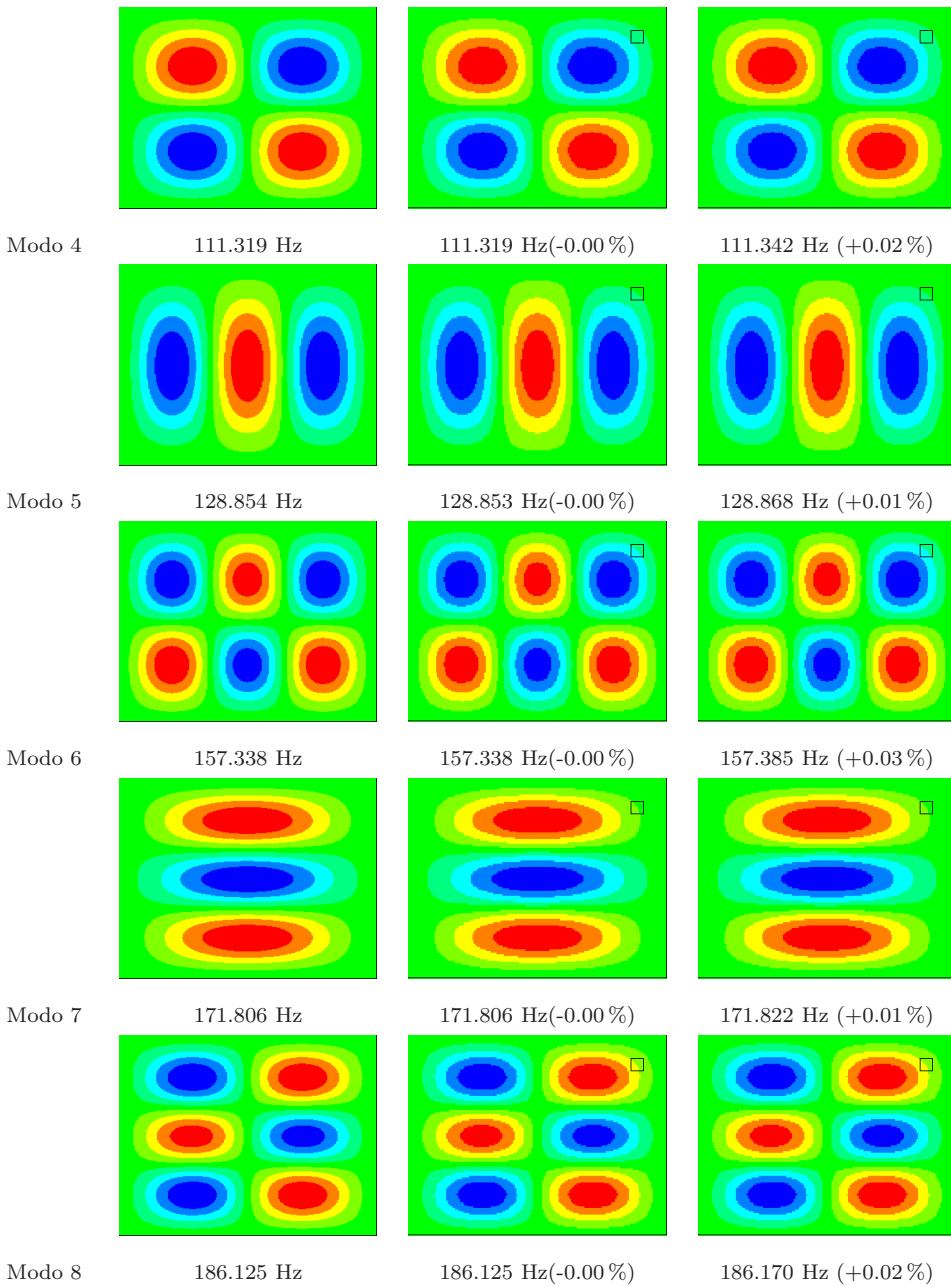


Tabla A.5: Comparación FEM (sin daño)-FEM-Ritz (con daño) de los modos de vibración y sus correspondientes frecuencias para la placa CFRP1 con daño por disminución en ambos módulos de Young (-10%) en la posición P3.

## A.6 Placa CFRP1 con daño por disminución en ambos módulos de Young (-1 %)

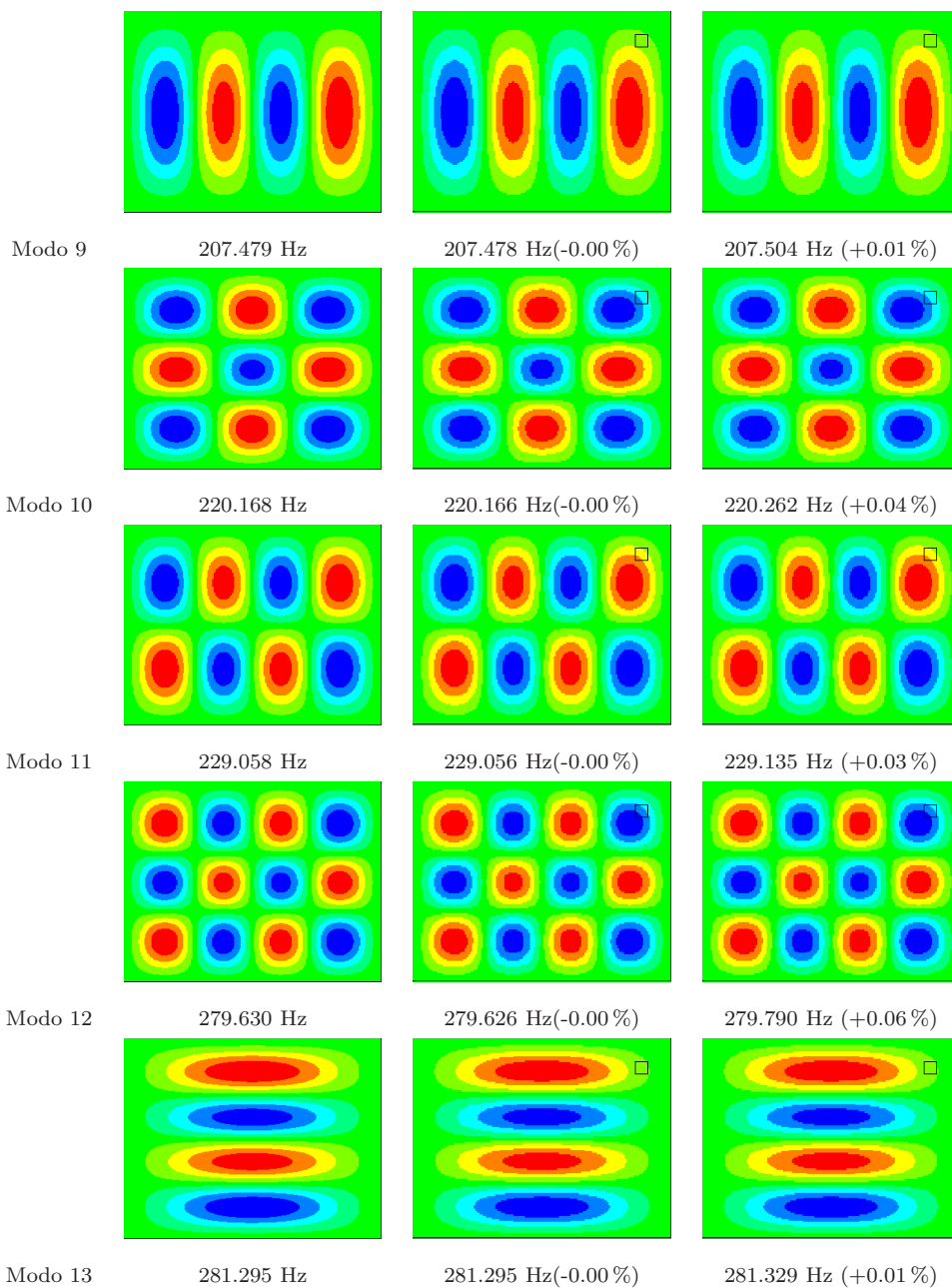
En la Tabla A.6 se pueden observar los primeros 25 modos de vibración de la placa CFRP1 con daño por disminución en ambos módulos de Young (-1 %) en la posición P3, calculados mediante simulación FEM y mediante el método de Ritz, comparados con los modos de la placa sin daño calculados mediante simulación FEM, junto a sus correspondientes frecuencias y la diferencia porcentual entre ellas. Se puede observar que los modos son prácticamente idénticos a simple vista, mientras en las frecuencias, centrándose solo en simulación FEM, los cambios son menores de dos decimales porcentuales, por lo que se pueden considerar idénticas.

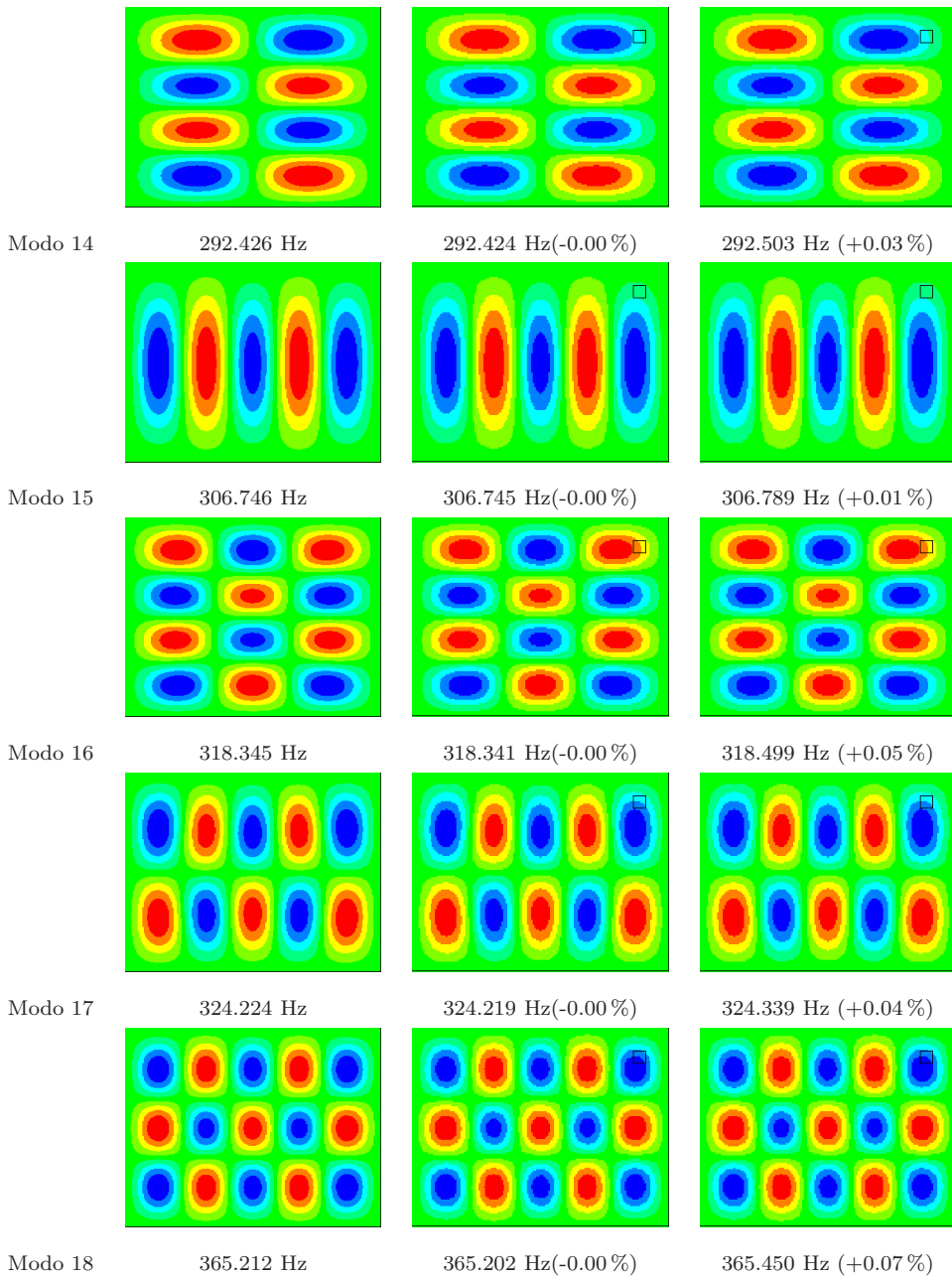




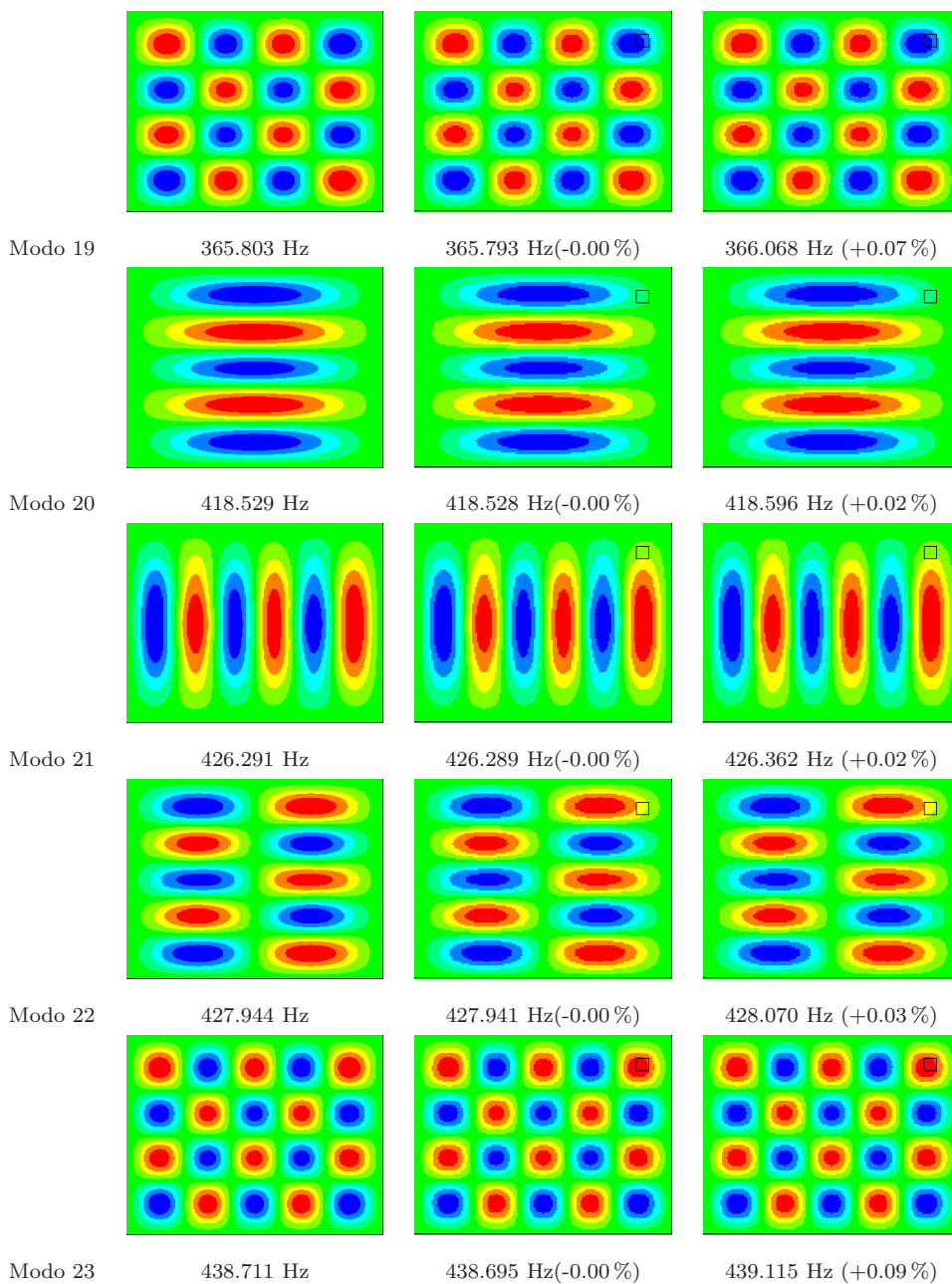


A.6. Placa CFRP1 con daño por disminución en ambos módulos de Young (-1 %)





A.6. Placa CFRP1 con daño por disminución en ambos módulos de Young (-1 %)



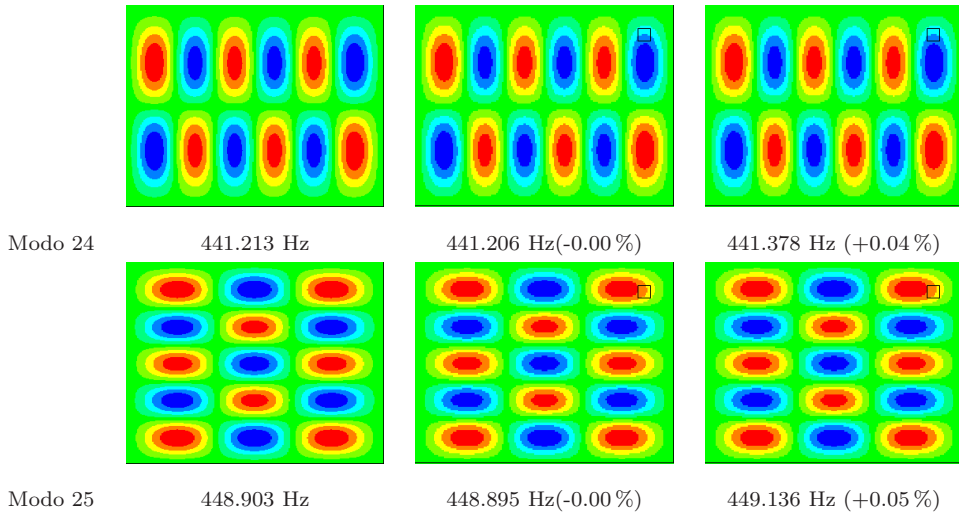


Tabla A.6: Comparación FEM (sin daño)-FEM-Ritz (con daño) de los modos de vibración y sus correspondientes frecuencias para la placa CFRP1 con daño por disminución en ambos módulos de Young (-1%) en la posición P3.

## Apéndice B

# Cálculo analítico de las integrales en el método de Ritz

### B.1 Sin movimientos de sólido rígido

En el caso de tener condiciones de contorno que impidan movimientos de sólido rígido de la placa, las funciones usadas a lo largo de esta Memoria en los cálculos del método de Ritz son las definidas por Gartner en [65]:

$$X_i(x) = A_i \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) + B_i \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) + C_i e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} + D_i e^{\frac{-\gamma_i(a-x)}{a}}, \quad (\text{B.1})$$

$$Y_j(y) = A_j \cos\left(\frac{\gamma_j y}{b}\right) + B_j \sin\left(\frac{\gamma_j y}{b}\right) + C_j e^{-\frac{\gamma_j y}{b}} + D_j e^{\frac{-\gamma_j(b-y)}{b}}, \quad (\text{B.2})$$

donde  $a$  y  $b$  son los lados de la placa.

Estas funciones tienen las siguientes derivadas:

$$\frac{dX_i(x)}{dx} = \frac{\gamma_i}{a} \left( -A_i \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) + B_i \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) - C_i e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} + D_i e^{\frac{-\gamma_i(a-x)}{a}} \right), \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{dY_j(y)}{dy} = \frac{\gamma_j}{b} \left( -A_j \sin\left(\frac{\gamma_j y}{b}\right) + B_j \cos\left(\frac{\gamma_j y}{b}\right) - C_j e^{-\frac{\gamma_j y}{b}} + D_j e^{\frac{-\gamma_j(b-y)}{b}} \right), \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{d^2 X_i(x)}{dx^2} = \frac{\gamma_i^2}{a^2} \left( -A_i \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) - B_i \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) + C_i e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} + D_i e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} \right), \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{d^2 Y_j(y)}{dy^2} = \frac{\gamma_j^2}{b^2} \left( -A_j \cos\left(\frac{\gamma_j y}{b}\right) - B_j \sin\left(\frac{\gamma_j y}{b}\right) + C_j e^{-\frac{\gamma_j y}{b}} + D_j e^{-\frac{\gamma_j(b-y)}{b}} \right). \quad (\text{B.6})$$

Como se vio en la Sección 2.2, el método de Ritz viene definido por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \left\{ \sum_k \int \int_{A^k} \left( D_{11}^k \frac{d^2 X_i}{dx^2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} Y_j Y_n + D_{22}^k X_i X_m \frac{d^2 Y_j}{dy^2} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \right. \right. \\ & + D_{12}^k \left( \frac{d^2 X_i}{dx^2} X_m Y_j \frac{d^2 Y_n}{dy^2} + X_i \frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{d^2 Y_j}{dy^2} Y_n \right) + 4D_{66}^k \frac{dX_i}{dx} \frac{dX_m}{dx} \frac{dY_j}{dy} \frac{dY_n}{dy} \\ & \quad + 2D_{16}^k \left( \frac{d^2 X_i}{dx^2} \frac{dX_m}{dx} Y_j \frac{dY_n}{dy} + \frac{dX_i}{dx} \frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{dY_j}{dy} Y_n \right) \\ & \quad \left. + 2D_{26}^k \left( \frac{dX_i}{dx} X_m \frac{dY_j}{dy} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} + X_i \frac{dX_m}{dx} \frac{d^2 Y_j}{dy^2} \frac{dY_n}{dy} \right) \right) dx dy \\ & \quad - \sum_k \int \int_{A^k} (\rho^k h^k \omega^2 X_i X_m Y_j Y_n) dx dy \Big\} A_{mn} = 0; \\ & \quad i = 1, \dots, M; \quad j = 1, \dots, N; \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

donde el índice  $k$  denota las distintas áreas de la placa ( $A^k$ ).

Suponiendo que cada una de las áreas  $A^k$  es cuadrada, cada una de las integrales sobre un área concreta, cuyos extremos serán  $a_1, a_2$  en el eje  $x$  y  $b_1, b_2$  en el eje  $y$ , tendrá la forma siguiente:

$$\begin{aligned} & D_{11}^k \int_{a_1}^{a_2} \frac{d^2 X_i}{dx^2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} dx \int_{b_1}^{b_2} Y_j Y_n dy + D_{22}^k \int_{a_1}^{a_2} X_i X_m dx \int_{b_1}^{b_2} \frac{d^2 Y_j}{dy^2} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} dy + \\ & + D_{12}^k \left( \int_{a_1}^{a_2} \frac{d^2 X_i}{dx^2} X_m dx \int_{b_1}^{b_2} Y_j \frac{d^2 Y_n}{dy^2} dy + \int_{a_1}^{a_2} X_i \frac{d^2 X_m}{dx^2} dx \int_{b_1}^{b_2} \frac{d^2 Y_j}{dy^2} Y_n dy \right) \\ & \quad + 4D_{66}^k \int_{a_1}^{a_2} \frac{dX_i}{dx} \frac{dX_m}{dx} dx \int_{b_1}^{b_2} \frac{dY_j}{dy} \frac{dY_n}{dy} dy \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned}
 &+2D_{16}^k \left( \int_{a_1}^{a_2} \frac{d^2 X_i}{dx^2} \frac{dX_m}{dx} dx \int_{b_1}^{b_2} Y_j \frac{dY_n}{dy} dy + \int_{a_1}^{a_2} \frac{dX_i}{dx} \frac{d^2 X_m}{dx^2} dx \int_{b_1}^{b_2} \frac{dY_j}{dy} Y_n dy \right) \\
 &+2D_{26}^k \left( \int_{a_1}^{a_2} \frac{dX_i}{dx} X_m dx \int_{b_1}^{b_2} \frac{dY_j}{dy} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} dy + \int_{a_1}^{a_2} X_i \frac{dX_m}{dx} dx \int_{b_1}^{b_2} \frac{d^2 Y_j}{dy^2} \frac{dY_n}{dy} dy \right) \\
 &\quad - \left( \rho^k h^k \omega^2 \int_{a_1}^{a_2} X_i X_m dx \int_{b_1}^{b_2} Y_j Y_n dy \right).
 \end{aligned}$$

Debido a la total simetría entre las integrales en las variables  $x$  e  $y$ , a partir de ahora nos centraremos solo en las integrales en la variable  $x$ . Si se observa la integral (B.8), se puede ver que existen nueve tipos de integrales sobre cada eje, cada una de ellas dependiente de trece parámetros, que en el caso de las integrales sobre  $x$  serán  $A_i, B_i, C_i, D_i, \gamma_i, A_m, B_m, C_m, D_m, \gamma_m, a_1, a_2$  y  $a$ . Desarrollando estos nueve tipos de integrales:

$$\begin{aligned}
 I_{00}(i, m, a_1, a_2, a) &= \int_{a_1}^{a_2} X_i X_m dx = \\
 &= A_i A_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx + B_i B_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad + C_i C_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx + D_i D_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx \\
 &+ A_i B_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx + B_i A_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad + A_i C_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx + C_i A_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \quad (\text{B.9a}) \\
 &\quad + A_i D_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx + D_i A_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad + B_i C_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx + C_i B_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad + B_i D_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx + D_i B_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad + C_i D_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx + D_i C_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{11}(i, m, a_1, a_2, a) &= \int_{a_1}^{a_2} \frac{dX_i}{dx} \frac{dX_m}{dx} dx = \frac{\gamma_i}{a} \frac{\gamma_m}{a} \\
 &\left( B_i B_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx + A_i A_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \right. \\
 &\quad + C_i C_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx + D_i D_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx \\
 &\quad - B_i A_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx - A_i B_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad - B_i C_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx - C_i B_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \quad (B.9b) \\
 &\quad + B_i D_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx + D_i B_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad + A_i C_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx + C_i A_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad - A_i D_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx - D_i A_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad \left. - C_i D_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx - D_i C_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{01}(i, m, a_1, a_2, a) &= \int_{a_1}^{a_2} X_i \frac{dX_m}{dx} dx = \frac{\gamma_m}{a} \\
 &\left( A_i B_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx - B_i A_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \right. \\
 &\quad - C_i C_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx + D_i D_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx \\
 &\quad - A_i A_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx + B_i B_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad - A_i C_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx + C_i B_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \quad (B.9c) \\
 &\quad + A_i D_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx + D_i B_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad - B_i C_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx - C_i A_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad + B_i D_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx - D_i A_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad \left. + C_i D_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx - D_i C_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx \right),
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 I_{10}(i, m, a_1, a_2, a) &= \int_{a_1}^{a_2} \frac{dX_i}{dx} X_m dx = \frac{\gamma_i}{a} \\
 &\left( B_i A_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx - A_i B_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \right. \\
 &\quad - C_i C_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx + D_i D_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx \\
 &+ B_i B_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx - A_i A_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad + B_i C_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx - C_i A_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \quad (B.9d) \\
 &\quad + B_i D_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx + D_i A_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad - A_i C_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx - C_i B_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad - A_i D_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx + D_i B_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad \left. - C_i D_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx + D_i C_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{02}(i, m, a_1, a_2, a) &= \int_{a_1}^{a_2} X_i \frac{d^2 X_m}{dx^2} dx = \frac{\gamma_m^2}{a^2} \\
 &\left( -A_i A_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx - B_i B_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \right. \\
 &\quad + C_i C_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx + D_i D_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx \\
 &- A_i B_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx - B_i A_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad + A_i C_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx - C_i A_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \quad (B.9e) \\
 &\quad + A_i D_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx - D_i A_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad + B_i C_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx - C_i B_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad + B_i D_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx - D_i B_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad \left. + C_i D_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx + D_i C_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{20}(i, m, a_1, a_2, a) &= \int_{a_1}^{a_2} \frac{d^2 X_i}{dx^2} X_m dx = \frac{\gamma_i^2}{a^2} \\
 &\left( -A_i A_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx - B_i B_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \right. \\
 &\quad + C_i C_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx + D_i D_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx \\
 &\quad - A_i B_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx - B_i A_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad - A_i C_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx + C_i A_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \quad (B.9f) \\
 &\quad - A_i D_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx + D_i A_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad - B_i C_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx + C_i B_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad - B_i D_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx + D_i B_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad \left. + C_i D_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx + D_i C_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{12}(i, m, a_1, a_2, a) &= \int_{a_1}^{a_2} \frac{dX_i}{dx} \frac{d^2 X_m}{dx^2} dx = \frac{\gamma_i \gamma_m^2}{a a^2} \\
 &\left( -B_i A_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx + A_i B_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \right. \\
 &\quad - C_i C_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx + D_i D_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx \\
 &\quad - B_i B_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx + A_i A_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad + B_i C_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx + C_i A_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \quad (B.9g) \\
 &\quad + B_i D_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx - D_i A_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad - A_i C_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx + C_i B_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad - A_i D_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx - D_i B_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad \left. - C_i D_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx + D_i C_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{21}(i, m, a_1, a_2, a) &= \int_{a_1}^{a_2} \frac{d^2 X_i}{dx^2} \frac{dX_m}{dx} dx = \frac{\gamma_i^2}{a^2} \frac{\gamma_m}{a} \\
 &\left( -A_i B_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx + B_i A_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \right. \\
 &\quad - C_i C_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx + D_i D_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx \\
 &\quad + A_i A_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx - B_i B_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad + A_i C_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx + C_i B_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \quad (B.9h) \\
 &\quad - A_i D_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx + D_i B_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad + B_i C_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx - C_i A_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad - B_i D_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx - D_i A_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad \left. + C_i D_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx - D_i C_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{22}(i, m, a_1, a_2, a) &= \int_{a_1}^{a_2} \frac{d^2 X_i}{dx^2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} dx = \frac{\gamma_i^2}{a^2} \frac{\gamma_m^2}{a^2} \\
 &\left( A_i A_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx + B_i B_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \right. \\
 &\quad + C_i C_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx + D_i D_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx \\
 &\quad + A_i B_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx + B_i A_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad - A_i C_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx - C_i A_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \quad (B.9i) \\
 &\quad - A_i D_m \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx - D_i A_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad - B_i C_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx - C_i B_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad - B_i D_m \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx - D_i B_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx \\
 &\quad \left. + C_i D_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx + D_i C_m \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx \right).
 \end{aligned}$$

Cada una de estas nueve integrales depende, a su vez, de diez tipos de integrales, dependientes cada una de ellas de cinco parámetros ( $\gamma_i$ ,  $\gamma_m$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a$ ). Estas integrales son fácilmente resolubles analíticamente. Para evitar problemas numéricos, se calculan las integrales de forma separada para dos casos:  $i = m$  e  $i \neq m$ .

- Caso  $i = m$

$$\begin{aligned} & \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) dx = \\ & \frac{2(a_2 - a_1)\gamma_i - a \sin\left(\frac{2a_1\gamma_i}{a}\right) + a \sin\left(\frac{2a_2\gamma_i}{a}\right)}{4\gamma_i}, \end{aligned} \quad (\text{B.10a})$$

$$\begin{aligned} & \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) dx = \\ & \frac{2(a_2 - a_1)\gamma_i + a \sin\left(\frac{2a_1\gamma_i}{a}\right) - a \sin\left(\frac{2a_2\gamma_i}{a}\right)}{4\gamma_i}, \end{aligned} \quad (\text{B.10b})$$

$$\int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} dx = \frac{a \left( e^{-\frac{2a_1\gamma_i}{a}} - e^{-\frac{2a_2\gamma_i}{a}} \right)}{2\gamma_i}, \quad (\text{B.10c})$$

$$\int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} dx = \frac{ae^{-2\gamma_i} \left( -e^{\frac{2a_1\gamma_i}{a}} + e^{\frac{2a_2\gamma_i}{a}} \right)}{2\gamma_i}, \quad (\text{B.10d})$$

$$\int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) dx = \frac{a \left( \cos\left(\frac{2a_1\gamma_i}{a}\right) - \cos\left(\frac{2a_2\gamma_i}{a}\right) \right)}{4\gamma_i}, \quad (\text{B.10e})$$

$$\begin{aligned} & \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} dx = \frac{a}{2\gamma_i} \\ & \left( e^{-\frac{a_1\gamma_i}{a}} \left[ \cos\left(\frac{a_1\gamma_i}{a}\right) - \sin\left(\frac{a_1\gamma_i}{a}\right) \right] + e^{-\frac{a_2\gamma_i}{a}} \left[ -\cos\left(\frac{a_2\gamma_i}{a}\right) + \sin\left(\frac{a_2\gamma_i}{a}\right) \right] \right), \end{aligned} \quad (\text{B.10f})$$

$$\left( -e^{-\frac{a_1\gamma_i}{a}} \left[ \cos\left(\frac{a_1\gamma_i}{a}\right) + \sin\left(\frac{a_1\gamma_i}{a}\right) \right] + e^{-\frac{a_2\gamma_i}{a}} \left[ \cos\left(\frac{a_2\gamma_i}{a}\right) + \sin\left(\frac{a_2\gamma_i}{a}\right) \right] \right), \quad (\text{B.10g})$$

$$\left( e^{-\frac{a_1\gamma_i}{a}} \left[ \cos\left(\frac{a_1\gamma_i}{a}\right) + \sin\left(\frac{a_1\gamma_i}{a}\right) \right] - e^{-\frac{a_2\gamma_i}{a}} \left[ \cos\left(\frac{a_2\gamma_i}{a}\right) + \sin\left(\frac{a_2\gamma_i}{a}\right) \right] \right), \quad (\text{B.10h})$$

$$e^{-\gamma_i} \left( e^{-\frac{a_1\gamma_i}{a}} \left[ \cos\left(\frac{a_1\gamma_i}{a}\right) - \sin\left(\frac{a_1\gamma_i}{a}\right) \right] + e^{-\frac{a_2\gamma_i}{a}} \left[ -\cos\left(\frac{a_2\gamma_i}{a}\right) + \sin\left(\frac{a_2\gamma_i}{a}\right) \right] \right), \quad (\text{B.10i})$$

$$\int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} dx = (a_2 - a_1)e^{-\gamma_i}. \quad (\text{B.10j})$$

- Caso  $i \neq m$

$$\begin{aligned} & \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \cos\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx = \\ & = \frac{1}{2} a \left( \frac{\sin\left(\frac{a_2(\gamma_i - \gamma_m)}{a}\right) - \sin\left(\frac{a_1(\gamma_i - \gamma_m)}{a}\right)}{\gamma_i - \gamma_m} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\sin\left(\frac{a_2(\gamma_i + \gamma_m)}{a}\right) - \sin\left(\frac{a_1(\gamma_i + \gamma_m)}{a}\right)}{\gamma_i + \gamma_m} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.11a})$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx = \\
 &= \frac{a}{\gamma_i^2 - \gamma_m^2} \left( -\gamma_m \cdot \cos\left(\frac{a_1 \gamma_m}{a}\right) \sin\left(\frac{a_1 \gamma_i}{a}\right) + \gamma_m \cdot \cos\left(\frac{a_2 \gamma_m}{a}\right) \sin\left(\frac{a_2 \gamma_i}{a}\right) \right. \\
 & \quad \left. + \gamma_i \cdot \cos\left(\frac{a_1 \gamma_i}{a}\right) \sin\left(\frac{a_1 \gamma_m}{a}\right) - \gamma_i \cdot \cos\left(\frac{a_2 \gamma_i}{a}\right) \sin\left(\frac{a_2 \gamma_m}{a}\right) \right), \tag{B.11b}
 \end{aligned}$$

$$\int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx = \frac{a \left( e^{-\frac{a_1(\gamma_i + \gamma_m)}{a}} - e^{-\frac{a_2(\gamma_i + \gamma_m)}{a}} \right)}{\gamma_i + \gamma_m}, \tag{B.11c}$$

$$\int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i(a-x)}{a}} e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx = \frac{a \left( -e^{-\frac{(a-a_1)(\gamma_i + \gamma_m)}{a}} + e^{-\frac{(a-a_2)(\gamma_i + \gamma_m)}{a}} \right)}{\gamma_i + \gamma_m}, \tag{B.11d}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \sin\left(\frac{\gamma_m x}{a}\right) dx = \\
 &= \frac{a}{\gamma_i^2 - \gamma_m^2} \left( \gamma_m \cdot \cos\left(\frac{a_2 \gamma_i}{a}\right) \cos\left(\frac{a_2 \gamma_m}{a}\right) - \gamma_m \cdot \cos\left(\frac{a_1 \gamma_i}{a}\right) \cos\left(\frac{a_1 \gamma_m}{a}\right) \right. \\
 & \quad \left. + \gamma_i \cdot \sin\left(\frac{a_2 \gamma_i}{a}\right) \sin\left(\frac{a_2 \gamma_m}{a}\right) - \gamma_i \cdot \sin\left(\frac{a_1 \gamma_i}{a}\right) \sin\left(\frac{a_1 \gamma_m}{a}\right) \right), \tag{B.11e}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx = \\
 &= \frac{a}{\gamma_i^2 + \gamma_m^2} \left( e^{-\frac{a_1 \gamma_m}{a}} \left[ \gamma_m \cdot \cos\left(\frac{a_1 \gamma_i}{a}\right) - \gamma_i \cdot \sin\left(\frac{a_1 \gamma_i}{a}\right) \right] \right. \\
 & \quad \left. - e^{-\frac{a_2 \gamma_m}{a}} \left[ \gamma_m \cdot \cos\left(\frac{a_2 \gamma_i}{a}\right) - \gamma_i \cdot \sin\left(\frac{a_2 \gamma_i}{a}\right) \right] \right), \tag{B.11f}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx = \\
 &= \frac{a \cdot e^{-\gamma_m}}{\gamma_i^2 + \gamma_m^2} \left( e^{\frac{a_2 \gamma_m}{a}} \left[ \gamma_m \cdot \cos\left(\frac{a_2 \gamma_i}{a}\right) + \gamma_i \cdot \sin\left(\frac{a_2 \gamma_i}{a}\right) \right] \right. \\
 & \quad \left. - e^{\frac{a_1 \gamma_m}{a}} \left[ \gamma_m \cdot \cos\left(\frac{a_1 \gamma_i}{a}\right) + \gamma_i \cdot \sin\left(\frac{a_1 \gamma_i}{a}\right) \right] \right), \tag{B.11g}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m x}{a}} dx = \\
 & = \frac{a}{\gamma_i^2 + \gamma_m^2} \left( e^{-\frac{a_1 \gamma_m}{a}} \left[ \gamma_i \cdot \cos\left(\frac{a_1 \gamma_i}{a}\right) + \gamma_m \cdot \sin\left(\frac{a_1 \gamma_i}{a}\right) \right] \right. \\
 & \quad \left. - e^{-\frac{a_2 \gamma_m}{a}} \left[ \gamma_i \cdot \cos\left(\frac{a_2 \gamma_i}{a}\right) + \gamma_m \cdot \sin\left(\frac{a_2 \gamma_i}{a}\right) \right] \right), \tag{B.11h}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx = \\
 & = \frac{ae^{-\gamma_m}}{\gamma_i^2 + \gamma_m^2} \left( e^{\frac{a_1 \gamma_m}{a}} \left[ \gamma_i \cdot \cos\left(\frac{a_1 \gamma_i}{a}\right) - \gamma_m \cdot \sin\left(\frac{a_1 \gamma_i}{a}\right) \right] \right. \\
 & \quad \left. - e^{\frac{a_2 \gamma_m}{a}} \left[ \gamma_i \cdot \cos\left(\frac{a_2 \gamma_i}{a}\right) - \gamma_m \cdot \sin\left(\frac{a_2 \gamma_i}{a}\right) \right] \right), \tag{B.11i}
 \end{aligned}$$

$$\int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} e^{-\frac{\gamma_m(a-x)}{a}} dx = \frac{ae^{-\gamma_m} \left( e^{-\frac{a_1(\gamma_i - \gamma_m)}{a}} - e^{-\frac{a_2(\gamma_i - \gamma_m)}{a}} \right)}{\gamma_i - \gamma_m}. \tag{B.11j}$$

Introduciendo las integrales (B.10) y (B.11) en las integrales (B.9), y estas a su vez en (B.8) junto a sus equivalentes en el eje  $y$ , se puede calcular cada una de las integrales de los distintos sumatorios de (B.7).

## B.2 Con movimientos de sólido rígido

En el caso de tener condiciones de contorno que permitan movimientos de sólido rígido de la placa, estos deben incluirse en los cálculos de análisis modal. Por ejemplo, si la placa está libre en sus cuatro lados, las dos primeras funciones serán (considerando solo las funciones en  $x$ ), según [134] y [130]:

$$X_1 = 1, \tag{B.12}$$

$$X_2 = \sqrt{3} \left( 1 - \frac{2x}{a} \right), \tag{B.13}$$

siendo a partir de  $X_3$  funciones del mismo tipo que las del apartado anterior.

Para introducir estas funciones de manera fácilmente programable, generalizamos las funciones de Gartner a las siguientes funciones:

$$X_i^{SL}(x) = \alpha_i \left( A_i \cos \left( \frac{\gamma_i x}{a} \right) + B_i \sin \left( \frac{\gamma_i x}{a} \right) + C_i e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} + D_i e^{-\frac{\gamma_i (a-x)}{a}} \right) + \beta_i + \delta_i \sqrt{3} \left( \epsilon_i - \frac{2x}{a} \right). \quad (\text{B.14})$$

Sus derivadas serán:

$$\frac{dX_i^{SL}(x)}{dx} = \alpha_i \frac{\gamma_i}{a} \left( -A_i \sin \left( \frac{\gamma_i x}{a} \right) + B_i \cos \left( \frac{\gamma_i x}{a} \right) - C_i e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} + D_i e^{-\frac{\gamma_i (a-x)}{a}} \right) + \delta_i \left( -\frac{2\sqrt{3}}{a} \right), \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{d^2 X_i^{SL}(x)}{dx^2} = \alpha_i \frac{\gamma_i^2}{a^2} \left( -A_i \cos \left( \frac{\gamma_i x}{a} \right) - B_i \sin \left( \frac{\gamma_i x}{a} \right) + C_i e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} + D_i e^{-\frac{\gamma_i (a-x)}{a}} \right). \quad (\text{B.16})$$

De esta forma, eligiendo los siguientes valores para  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\delta_i$  y  $\epsilon_i$ , se podrán representar todas las funciones correspondientes a una placa libre:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0; \beta_1 = 1; \delta_1 = 0; \\ \alpha_2 &= 0; \beta_2 = 0; \delta_2 = 1; \epsilon_2 = 1; \\ i &\geq 3: \\ \alpha_i &= 1; \beta_i = 0; \delta_i = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Con estas nuevas funciones las integrales (B.9) quedarían de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} I_{00}^{SL}(i, m, a_1, a_2, a) &= \int_{a_1}^{a_2} X_i^{SL} X_m^{SL} dx = \\ &= \alpha_i \alpha_m I_{00} + \alpha_i \beta_m \int_{a_1}^{a_2} X_i dx + \beta_i \alpha_m \int_{a_1}^{a_2} X_m dx \\ &+ \alpha_i \delta_m \int_{a_1}^{a_2} X_i \sqrt{3} \left( \epsilon_m - \frac{2x}{a} \right) dx + \delta_i \alpha_m \int_{a_1}^{a_2} X_m \sqrt{3} \left( \epsilon_i - \frac{2x}{a} \right) dx \\ &+ \beta_i \beta_m \int_{a_1}^{a_2} 1 dx + \beta_i \delta_m \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{3} \left( \epsilon_m - \frac{2x}{a} \right) dx + \delta_i \beta_m \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{3} \left( \epsilon_i - \frac{2x}{a} \right) dx \\ &+ \delta_i \delta_m \int_{a_1}^{a_2} 3 \left( \epsilon_i - \frac{2x}{a} \right) \left( \epsilon_m - \frac{2x}{a} \right) dx, \end{aligned} \quad (\text{B.18a})$$



$$\begin{aligned}
 I_{11}^{SL}(i, m, a_1, a_2, a) &= \int_{a_1}^{a_2} \frac{dX_i^{SL}}{dx} \frac{dX_m^{SL}}{dx} dx = \\
 &= \alpha_i \alpha_m I_{11} + \alpha_i \delta_m \left( -\frac{2\sqrt{3}}{a} \right) \int_{a_1}^{a_2} \frac{dX_i}{dx} dx \\
 &+ \delta_i \alpha_m \left( -\frac{2\sqrt{3}}{a} \right) \int_{a_1}^{a_2} \frac{dX_m}{dx} dx + \delta_i \delta_m \frac{12}{a^2} \int_{a_1}^{a_2} 1 dx,
 \end{aligned} \tag{B.18b}$$

$$\begin{aligned}
 I_{01}^{SL}(i, m, a_1, a_2, a) &= \int_{a_1}^{a_2} X_i^{SL} \frac{dX_m^{SL}}{dx} dx = \\
 &= \alpha_i \alpha_m I_{01} + \beta_i \alpha_m \int_{a_1}^{a_2} \frac{dX_m}{dx} dx dx \\
 &+ \alpha_i \delta_m \left( -\frac{2\sqrt{3}}{a} \right) \int_{a_1}^{a_2} X_i dx + \delta_i \alpha_m \int_{a_1}^{a_2} \frac{dX_m}{dx} \sqrt{3} \left( \epsilon_i - \frac{2x}{a} \right) dx \\
 &+ \beta_i \delta_m \left( -\frac{2\sqrt{3}}{a} \right) \int_{a_1}^{a_2} 1 dx + \delta_i \delta_m \left( -\frac{6}{a} \right) \int_{a_1}^{a_2} \left( \epsilon_i - \frac{2x}{a} \right) dx,
 \end{aligned} \tag{B.18c}$$

$$\begin{aligned}
 I_{10}^{SL}(i, m, a_1, a_2, a) &= \int_{a_1}^{a_2} \frac{dX_i^{SL}}{dx} X_m^{SL} dx = \\
 &= \alpha_i \alpha_m I_{10} + \alpha_i \beta_m \int_{a_1}^{a_2} \frac{dX_i}{dx} dx \\
 &+ \alpha_i \delta_m \int_{a_1}^{a_2} \frac{dX_i}{dx} \sqrt{3} \left( \epsilon_m - \frac{2x}{a} \right) dx + \delta_i \alpha_m \left( -\frac{2\sqrt{3}}{a} \right) \int_{a_1}^{a_2} X_m dx \\
 &+ \delta_i \beta_m \left( -\frac{2\sqrt{3}}{a} \right) \int_{a_1}^{a_2} 1 dx + \delta_i \delta_m \left( -\frac{6}{a} \right) \int_{a_1}^{a_2} \left( \epsilon_m - \frac{2x}{a} \right) dx,
 \end{aligned} \tag{B.18d}$$

$$\begin{aligned}
 I_{02}^{SL}(i, m, a_1, a_2, a) &= \int_{a_1}^{a_2} X_i^{SL} \frac{d^2 X_m^{SL}}{dx^2} dx = \\
 &= \alpha_i \alpha_m I_{02} + \beta_i \alpha_m \int_{a_1}^{a_2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} dx + \delta_i \alpha_m \int_{a_1}^{a_2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} \sqrt{3} \left( \epsilon_i - \frac{2x}{a} \right) dx,
 \end{aligned} \tag{B.18e}$$

$$\begin{aligned}
 I_{20}^{SL}(i, m, a_1, a_2, a) &= \int_{a_1}^{a_2} \frac{d^2 X_i^{SL}}{dx^2} X_m^{SL} dx = \\
 &= \alpha_i \alpha_m I_{20} + \alpha_i \beta_m \int_{a_1}^{a_2} \frac{d^2 X_i}{dx^2} dx + \alpha_i \delta_m \int_{a_1}^{a_2} \frac{d^2 X_i}{dx^2} dx \sqrt{3} \left( \epsilon_m - \frac{2x}{a} \right) dx,
 \end{aligned} \tag{B.18f}$$

$$\begin{aligned}
 I_{12}^{SL}(i, m, a_1, a_2, a) &= \int_{a_1}^{a_2} \frac{dX_i^{SL}}{dx} \frac{d^2 X_m^{SL}}{dx^2} dx = \\
 &= \alpha_i \alpha_m I_{12} + \delta_i \alpha_m \left( -\frac{2\sqrt{3}}{a} \right) \int_{a_1}^{a_2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} dx,
 \end{aligned} \tag{B.18g}$$

$$\begin{aligned}
 I_{21}^{SL}(i, m, a_1, a_2, a) &= \int_{a_1}^{a_2} \frac{d^2 X_i^{SL}}{dx^2} \frac{dX_m^{SL}}{dx} dx = \\
 &= \alpha_i \alpha_m I_{21} + \alpha_i \delta_m \left( -\frac{2\sqrt{3}}{a} \right) \int_{a_1}^{a_2} \frac{d^2 X_i}{dx^2} dx,
 \end{aligned} \tag{B.18h}$$

$$I_{22}^{SL}(i, m, a_1, a_2, a) = \int_{a_1}^{a_2} \frac{d^2 X_i^{SL}}{dx^2} \frac{d^2 X_m^{SL}}{dx^2} dx = \alpha_i \alpha_m I_{22}. \tag{B.18i}$$

Finalmente, estas integrales dependerán de las integrales (B.9) previamente calculadas y de un nuevo conjunto de once integrales:

$$\int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) dx = \frac{a \left( -\sin\left(\frac{a_1 \gamma_i}{a}\right) + \sin\left(\frac{a_2 \gamma_i}{a}\right) \right)}{\gamma_i}, \tag{B.19a}$$

$$\int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) dx = \frac{a \left( \cos\left(\frac{a_1 \gamma_i}{a}\right) - \cos\left(\frac{a_2 \gamma_i}{a}\right) \right)}{\gamma_i}, \tag{B.19b}$$

$$\int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} dx = \frac{a \left( e^{-\frac{a_1 \gamma_i}{a}} - e^{-\frac{a_2 \gamma_i}{a}} \right)}{\gamma_i}, \tag{B.19c}$$

$$\int_{a_1}^{a_2} e^{\frac{-\gamma_i(a-x)}{a}} dx = \frac{a \left( -e^{-\frac{(a-a_1)\gamma_i}{a}} + e^{-\frac{(a-a_2)\gamma_i}{a}} \right)}{\gamma_i}, \tag{B.19d}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{a_1}^{a_2} \cos\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \sqrt{3} \left(\epsilon_m - \frac{2x}{a}\right) dx = \\
 & = \frac{\sqrt{3}}{\gamma_i^2} \left(2a \left(\cos\left(\frac{a_1 \gamma_i}{a}\right) - \cos\left(\frac{a_2 \gamma_i}{a}\right)\right)\right. \\
 & \left. + \gamma_i \left(\sin\left(\frac{a_1 \gamma_i}{a}\right) (2a_1 - a\epsilon_m) + \sin\left(\frac{a_2 \gamma_i}{a}\right) (-2a_2 + a\epsilon_m)\right)\right), \tag{B.19e}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{a_1}^{a_2} \sin\left(\frac{\gamma_i x}{a}\right) \sqrt{3} \left(\epsilon_m - \frac{2x}{a}\right) dx = \\
 & = \frac{\sqrt{3}}{\gamma_i^2} \left(2a \left(\sin\left(\frac{a_1 \gamma_i}{a}\right) - \sin\left(\frac{a_2 \gamma_i}{a}\right)\right)\right. \\
 & \left. + \gamma_i \left(\cos\left(\frac{a_2 \gamma_i}{a}\right) (2a_2 - a\epsilon_m) + \cos\left(\frac{a_1 \gamma_i}{a}\right) (-2a_1 + a\epsilon_m)\right)\right), \tag{B.19f}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{a_1}^{a_2} e^{-\frac{\gamma_i x}{a}} \sqrt{3} \left(\epsilon_m - \frac{2x}{a}\right) dx = \frac{\sqrt{3}}{\gamma_i^2} e^{-\frac{(a_1+a_2)\gamma_i}{a}} \\
 & \left(e^{\frac{a_1 \gamma_i}{a}} (2a + (2a_2 - a\epsilon_m) \gamma_i) + e^{\frac{a_2 \gamma_i}{a}} (-2a + (-2a_1 + a\epsilon_m) \gamma_i)\right), \tag{B.19g}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{a_1}^{a_2} e^{\frac{-\gamma_i(a-x)}{a}} \sqrt{3} \left(\epsilon_m - \frac{2x}{a}\right) dx = \frac{\sqrt{3}}{\gamma_i^2} e^{-\gamma_i} \\
 & \left(e^{\frac{a_1 \gamma_i}{a}} (-2a + (2a_1 - a\epsilon_m) \gamma_i) + e^{\frac{a_2 \gamma_i}{a}} (2a + (-2a_2 + a\epsilon_m) \gamma_i)\right), \tag{B.19h}
 \end{aligned}$$

$$\int_{a_1}^{a_2} \sqrt{3} \left(\epsilon_i - \frac{2x}{a}\right) dx = \sqrt{3} \left(\frac{a_1^2 - a_2^2}{a} - a_1 \epsilon_i + a_2 \epsilon_i\right), \tag{B.19i}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{a_1}^{a_2} 3 \left(\epsilon_i - \frac{2x}{a}\right) \left(\epsilon_m - \frac{2x}{a}\right) dx = \\
 & = \frac{4(-a_1^3 + a_2^3)}{a^2} + \frac{3\epsilon_i(a_1^2 - a_2^2)}{a} + \frac{3\epsilon_m(a_1^2 - a_2^2)}{a} + 3\epsilon_i \epsilon_m (-a_1 + a_2), \tag{B.19j}
 \end{aligned}$$

$$\int_{a_1}^{a_2} 1 dx = a_2 - a_1. \tag{B.19k}$$

Haciendo uso de (B.9) y (B.19) (con la definición de las funciones dada en (B.1) y (B.2)) se puede calcular (B.18), y con ello el equivalente a (B.8) para el caso en que se permitan movimientos de sólido rígido.

### B.3 Constantes usadas para diferentes condiciones de contorno

En esta Sección se enumeran las constantes necesarias para reproducir diferentes condiciones de contorno usando las funciones del tipo (B.14). Se considera cada condición de contorno definida sobre dos ejes opuestos, es decir, si la condición aplica sobre el eje  $x$  lo hará sobre los ejes  $x = 0$ ,  $a$ , y si aplica sobre el eje  $y$  sobre  $y = 0$ ,  $b$ . Usando la notación  $l = a$  o  $l = b$  según el caso, y el símbolo / para indicar que son posibles dos valores indistintamente (el de la izquierda y el de la derecha de /), se consideran posibles las siguientes condiciones de contorno sobre cada eje:

- **Empotrado:** La condición de empotrado impone que tanto desplazamiento transversal como la rotación de la placa en el eje considerado son siempre cero. Matemáticamente:

$$w(x, y)|_{x/y=0/l} = 0, \quad (\text{B.20a})$$

$$\left. \frac{\partial w(x, y)}{\partial x/y} \right|_{x/y=0/l} = 0. \quad (\text{B.20b})$$

- **Apoyado:** La condición de apoyado impone que el desplazamiento transversal y el momento aplicado a la placa en el eje considerado son siempre cero. Matemáticamente:

$$w(x, y)|_{x/y=0/l} = 0, \quad (\text{B.21a})$$

$$\left. \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2/y^2} \right|_{x/y=0/l} = 0. \quad (\text{B.21b})$$

- **Libre:** La condición de libre impone que el momento y la fuerza transversal aplicados a la placa en el eje considerado son siempre cero. Matemáticamente:

$$\left. \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2 / y^2} \right|_{x/y=0/l} = 0, \quad (\text{B.22a})$$

$$\left. \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^3 / y^3} \right|_{x/y=0/l} = 0. \quad (\text{B.22b})$$

- **Deslizante:** La condición de deslizante impone que la rotación y la fuerza transversal aplicados a la placa en el eje considerado son siempre cero. Matemáticamente:

$$\left. \frac{\partial w(x, y)}{\partial x / y} \right|_{x/y=0/l} = 0, \quad (\text{B.23a})$$

$$\left. \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^3 / y^3} \right|_{x/y=0/l} = 0. \quad (\text{B.23b})$$

Con estas condiciones de contorno se dispone de 16 combinaciones posibles, si bien por simetría se pueden considerar solamente 10, que son detalladas junto a sus correspondientes constantes y a su función característica:

### B.3.1 empotrada-empotrada

$$\begin{aligned} \alpha_i &= 1; \quad \beta_i = 0; \quad \delta_i = 0; \quad A_i = 1; \\ B_i &= -\frac{1 + (-1)^i e^{-\gamma_i}}{1 - (-1)^i e^{-\gamma_i}}; \quad C_i = -\frac{1}{1 - (-1)^i e^{-\gamma_i}}; \quad D_i = \frac{(-1)^i}{1 - (-1)^i e^{-\gamma_i}}; \\ \cos(\gamma_i) - \frac{2e^{-\gamma_i}}{1 + e^{-2\gamma_i}} &= 0. \end{aligned}$$

### B.3.2 apoyada-apoyada

$$\begin{aligned} \alpha_i &= 1; \quad \beta_i = 0; \quad \delta_i = 0; \\ A_i &= 0; \quad B_i = \sqrt{2}; \quad C_i = 0; \quad D_i = 0; \\ \gamma_i &= i\pi. \end{aligned}$$

### B.3.3 libre-libre

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0; & \beta_1 &= 1; & \delta_1 &= 0; \\ \alpha_2 &= 0; & \beta_2 &= 0; & \delta_2 &= 1; & \epsilon_2 &= 1; \\ & & & & i \geq 3: \\ \alpha_i &= 1; & \beta_i &= 0; & \delta_i &= 0; & A_i &= 1; \\ B_i &= -\frac{1 + (-1)^i e^{-\gamma_i}}{1 - (-1)^i e^{-\gamma_i}}; & C_i &= \frac{1}{1 - (-1)^i e^{-\gamma_i}}; & D_i &= -\frac{(-1)^i}{1 - (-1)^i e^{-\gamma_i}}; \\ & & \cos(\gamma_i) - \frac{2e^{-\gamma_i}}{1 + e^{-2\gamma_i}} &= 0.^1 \end{aligned}$$

### B.3.4 deslizante-deslizante

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0; & \beta_1 &= 1; & \delta_1 &= 0; \\ \alpha_i &= 1; & \beta_i &= 0; & \delta_i &= 0; \\ A_i &= \sqrt{2}; & B_i &= 0; & C_i &= 0; & D_i &= 0; \\ & & \gamma_i &= (i - 1)\pi. \end{aligned}$$

### B.3.5 empotrada-apoyada

$$\begin{aligned} \alpha_i &= 1; & \beta_i &= 0; & \delta_i &= 0; \\ A_i &= 1; & B_i &= -\frac{1 + e^{-2\gamma_i}}{1 - e^{-2\gamma_i}}; & C_i &= -\frac{1}{1 - e^{-2\gamma_i}}; & D_i &= \frac{e^{-2\gamma_i}}{1 - e^{-2\gamma_i}}; \\ & & \tan(\gamma_i) - \frac{1 - e^{-2\gamma_i}}{1 + e^{-2\gamma_i}} &= 0. \end{aligned}$$

### B.3.6 empotrada-libre

$$\begin{aligned} \alpha_i &= 1; & \beta_i &= 0; & \delta_i &= 0; & A_i &= 1; \\ B_i &= -\frac{1 + (-1)^i e^{-\gamma_i}}{1 - (-1)^i e^{-\gamma_i}}; & C_i &= -\frac{1}{1 - (-1)^i e^{-\gamma_i}}; & D_i &= \frac{(-1)^i}{1 - (-1)^i e^{-\gamma_i}}; \\ & & \cos(\gamma_i) + \frac{2e^{-\gamma_i}}{1 + e^{-2\gamma_i}} &= 0. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>La primera solución corresponde a  $\gamma_3$ , y así sucesivamente.

### B.3.7 empotrada-deslizante

$$\begin{aligned} \alpha_i &= 1; & \beta_i &= 0; & \delta_i &= 0; \\ A_i &= 1; & B_i &= -\frac{1 - e^{-2\gamma_i}}{1 + e^{-2\gamma_i}}; & C_i &= -\frac{1}{1 + e^{-2\gamma_i}}; & D_i &= -\frac{e^{-\gamma_i}}{1 + e^{-2\gamma_i}}; \\ & & & & \tan(\gamma_i) &+ \frac{1 - e^{-2\gamma_i}}{1 + e^{-2\gamma_i}} &= 0. \end{aligned}$$

### B.3.8 apoyada-libre

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0; & \beta_1 &= 0; & \delta_1 &= 1; & \epsilon_1 &= 0; \\ & & & & i &\geq 2: \\ \alpha_i &= 1; & \beta_i &= 0; & \delta_i &= 0; \\ A_i &= 0; & B_i &= \sqrt{2}; & C_i &= \frac{(-1)^i e^{-\gamma_i}}{\sqrt{1 + e^{-4\gamma_i}}}; & D_i &= \frac{(-1)^i}{\sqrt{1 + e^{-4\gamma_i}}}; \\ & & & & \tan(\gamma_i) &- \frac{1 - e^{-2\gamma_i}}{1 + e^{-2\gamma_i}} &= 0.^2 \end{aligned}$$

### B.3.9 apoyada-deslizante

$$\begin{aligned} \alpha_i &= 1; & \beta_i &= 0; & \delta_i &= 0; \\ A_i &= 0; & B_i &= \sqrt{2}; & C_i &= 0; & D_i &= 0; \\ & & & & \gamma_i &= \frac{2i - 1}{2}\pi. \end{aligned}$$

### B.3.10 libre-deslizante

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0; & \beta_1 &= 1; & \delta_1 &= 0; \\ & & & & i &\geq 2: \\ \alpha_i &= 1; & \beta_i &= 0; & \delta_i &= 0; \\ A_i &= 1; & B_i &= -\frac{1 - e^{-2\gamma_i}}{1 + e^{-2\gamma_i}}; & C_i &= \frac{1}{1 + e^{-2\gamma_i}}; & D_i &= \frac{e^{-\gamma_i}}{1 + e^{-2\gamma_i}}; \\ & & & & \tan(\gamma_i) &+ \frac{1 - e^{-2\gamma_i}}{1 + e^{-2\gamma_i}} &= 0.^2 \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>La primera solución corresponde a  $\gamma_2$ , y así sucesivamente.





# Bibliografía

- [1] <http://www.piezo.com/prodelect1epa104.html>, consultado el 29-04-2012.
- [2] <http://www.techmfg.com/products/labtables/68-500series.htm>, consultado el 29-04-2012.
- [3] <http://www.tasker.it/prodotti/scheda.php?lin=en&idCod=158>, consultado el 29-04-2012.
- [4] <http://www.hbm.com/es/menu/productos/bandas-extensometricas-y-accesorios/adhesivos/z70/>, consultado el 29-04-2012.
- [5] [http://www.emelec.es/index.php?option=com\\_ecatalog&Itemid=56&categoryid=6125](http://www.emelec.es/index.php?option=com_ecatalog&Itemid=56&categoryid=6125), consultado el 29-04-2012.
- [6] M. A.-B. Abdo, M. Hori. *A numerical study of structural damage detection using changes in the rotation of mode shapes*. En *Journal of Sound and Vibration*, 251 (2): 227–239, 2002. doi: 10.1006/jsvi.2001.3989.
- [7] P. Addison. *The illustrated Wavelet Transform handbook: Introductory theory and applications in science, engineering, medicine and finance*. Institute of Physics, London, UK, 2002.
- [8] R. J. Allemang. *Investigation of some multiple input/output frequency response function experimental modal analysis techniques*. Ph.D. thesis, University of Cincinnati, 1980.
- [9] R. J. Allemang. *The modal assurance criterion—twenty years of use and abuse*. En *Sound and Vibration*, 37 (8): 14–23, ago. 2003.

- [10] R. J. Allemang, D. L. Brown. *A correlation coefficient for modal vector analysis*. En *International Modal Analysis Conference Exhibit*, volume 1, pages 110–116. Union Coll, Schenectady, NY, USA, 1982.
- [11] J.-P. Antoine, P. Carrette, R. Murenzi, B. Piette. *Image analysis with two-dimensional continuous wavelet transform*. En *Signal Processing*, 31 (3): 241–272, abr. 1993. doi: 10.1016/0165-1684(93)90085-O.
- [12] J. E. Ashton. *Analysis of anisotropic plates II*. En *Journal of Composite Materials*, 3 (3): 470–479, jul. 1969. doi: 10.1177/002199836900300311.
- [13] J. E. Ashton. *Natural modes of free-free anisotropic plates*. En *Shock and Vibration Bulletin*, 39 (4): 93–99, 1969.
- [14] J. E. Ashton. *Anisotropic plate analysis-boundary conditions*. En *Journal of Composite Materials*, 4 (2): 162–171, abr. 1970. doi: 10.1177/002199837000400201.
- [15] J. E. Ashton, J. D. Anderson. *The natural modes of vibration of boron-epoxy plates*. En *Shock and Vibration Bulletin*, 39 (4): 81–91, 1969.
- [16] J. E. Ashton, M. E. Waddoups. *Analysis of anisotropic plates*. En *Journal of Composite Materials*, 3 (1): 148–165, ene. 1969. doi: 10.1177/002199836900300111.
- [17] D. R. Avalos, H. A. Larrondo, P. A. A. Laura. *Analysis of vibrating rectangular anisotropic plates with free-edge holes*. En *Journal of Sound and Vibration*, 222 (4): 691–695, mayo 1999. doi: 10.1006/jsvi.1998.2017.
- [18] E. Bacry, S. Mallat, G. Papanicolaou. *A Wavelet based space-time adaptive numerical method for partial differential equations*. En *Mathematical Modeling and Numerical Analysis*, 26 (7): 793–827, 1992.
- [19] D. V. Bambill, D. H. Felix, C. A. Rossit. *Natural frequencies of thin, rectangular plates with holes or orthotropic patches carrying an elastically mounted mass*. En *International Journal of Solids and Structures*, 43: 4116 – 4135, jul. 2006. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2005.03.051.
- [20] A. Benavent-Climent. *Estructuras sismorresistentes*. Maia Editores, 2010.

- [21] A. Benavent-Climent, E. Castro, A. Gallego. *AE monitoring for damage assessment of RC exterior beam-column subassemblages subjected to cyclic loading*. En *Journal of Structural Health Monitoring*, 8 (2): 175–189, mar. 2009. doi: 10.1177/1475921709102143.
- [22] A. Benavent-Climent, E. Castro, A. Gallego. *Evaluation of low-cycle fatigue damage in RC exterior beam-column subassemblages subjected to cycled loading*. En *Construction and Building Materials*, 24 (10): 1830–1842, oct. 2010. doi: j.conbuildmat.2010.04.021.
- [23] A. Benavent-Climent, A. Gallego, L. Romo-Melo, L. Morillas. *Health monitoring of hysteretic dampers subjected to cyclic loading through vibration tests*. En *Journal of Structural Health Monitoring*, 2012. Enviado.
- [24] A. Benavent-Climent, A. Gallego, J. M. Vico. *An Acoustic Emission energy index for damage evaluation of reinforced concrete slabs under seismic loads*. En *Journal of Structural Health Monitoring*, 11 (1): 69–81, ene. 2012. doi: 10.1177/14759217111401128.
- [25] J.-M. Berthelot. *Damping analysis of laminated beams and plates using the Ritz method*. En *Composite Structures*, 74 (2): 186 – 201, jul. 2006. doi: 10.1016/j.compstruct.2005.04.031.
- [26] J.-M. Berthelot, M. Assarar, Y. Sefrani, A. El Mahi. *Damping analysis of composite materials and structures*. En *Composite Structures*, 85 (3): 189 – 204, oct. 2008. doi: 10.1016/j.compstruct.2007.10.024.
- [27] R. B. Bhat. *Natural frequencies of rectangular plates using characteristic orthogonal polynomials in Rayleigh-Ritz method*. En *Journal of Sound and Vibration*, 102 (4): 493–499, oct. 1985. doi: 10.1016/S0022-460X(85)80109-7|.
- [28] R. B. Bhat. *Plate deflections using orthogonal polynomials*. En *Journal of Engineering Mechanics*, 111 (11): 1301–1309, nov. 1985. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1985)111:11(1301).
- [29] R. B. Bhat. *Flexural vibration of polygonal plates using characteristic orthogonal polynomials in two variables*. En *Journal of Sound and Vibration*, 114 (1): 65 – 71, 1987. doi: 10.1016/S0022-460X(87)80234-1.

- [30] R. D. Blevins. *Formulas for natural frequencies and mode shapes*. Krieger Publishing Company, 2001.
- [31] M. Boltežar, J. Slavič. *Enhancements to the continuous Wavelet Transform for damping identifications on short signals*. En *Mechanical Systems and Signal Processing*, 18 (5): 1065–1076, sep. 2004. doi: 10.1016/j.ymsp.2004.01.004.
- [32] Miguel Salvá Cárdenas. *Fundamentos de vibraciones*. Apuntes de clase del Máster de Ingeniería Acústica, 2011.
- [33] E. Castro. *Simulación de ondas elásticas en vigas mediante el método de redes y detección de daño mediante la Transformada Wavelet*. Ph.D. thesis, Universidad de Granada, jun. 2005.
- [34] E. Castro, M. T. García-Hernández, A. Gallego. *Transversal waves in beams via the network simulation method*. En *Journal of Sound and Vibration*, 283 (3-5): 997–1013, mayo 2005. doi: 10.1016/j.jsv.2004.05.026.
- [35] E. Castro, M. T. García-Hernández, A. Gallego. *Damage detection in rods by means of the Wavelet analysis of vibrations: Influence of the mode order*. En *Journal of Sound and Vibration*, 296 (4): 1028–1038, oct. 2006. doi: 10.1016/j.jsv.2006.02.026.
- [36] E. Castro, M. T. García-Hernández, A. Gallego. *Defect identification in rods subjetc to forced vibrations using the spatial Wavelet Transform*. En *Applied Acoustics*, 68 (6): 699–715, jun. 2007. doi: j.apacoust.2006.04.003.
- [37] G. B. Chai. *Frequency analysis of a S-C-S-C plate carrying a concentrated mass*. En *Journal of Sound and Vibration*, 179 (1): 170–177, ene. 1995. doi: 10.1006/jsvi.1995.0011.
- [38] G. B. Chai. *Frequency analysis of rectangular isotropic plates carrying a concentrated mass*. En *Computers & Structures*, 56 (1): 39–48, jul. 1995. doi: 10.1016/0045-7949(94)00533-9.
- [39] S. Chakraverty, M. Petyt. *Vibration of non-homogeneous plates using two-dimensional orthogonal polynomials as shape functions in the Rayleigh-Ritz method*. En *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*,

- Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 1999. doi: 10.1177/095440629921300706.
- [40] C.-C. Chang, L.-W. Chen. *Damage detection of a rectangular plate by spatial Wavelet based approach*. En *Applied Acoustics*, 65 (8): 819–832, ago. 2004. doi: 10.1016/j.apacoust.2004.01.004.
- [41] C.-C. Chang, L.-W. Chen. *Detection of the location and size of cracks in the multiple cracked beam by spatial Wavelet based approach*. En *Mechanical Systems and Signal Processing*, 19 (1): 139–155, ene. 2005. doi: 10.1016/j.ymsp.2003.11.001.
- [42] F. K. Chang. *Structural Health Monitoring 2000*. Technomic Publishing Company, Inc., Proceedings of the 2nd International Workshop on SHM, Standford, sep. 1999.
- [43] F. K. Chang, J. L. Pérez-Aparicio, K. Y. Chang. *Analysis of thick laminated composites*. En *Journal of Composite Materials*, 28 (8): 801–822, ago. 1990. doi: 10.1177/002199839002400802.
- [44] P. M. Ciancio, C. A. Rossit, P. A. A. Laura. *Approximate study of the free vibrations of a cantilever anisotropic plate carrying a concentrated mass*. En *Journal of Sound and Vibration*, 302 (3): 621–628, mayo 2007. doi: 10.1016/j.jsv.2006.11.027.
- [45] T. Dallard, G. R. Spedding. *2-D Wavelet Transforms: Generalization of the Hardy space and application to experimental studies*. En *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 12: 107–134, 1993.
- [46] I. Daubechies. *Ten lectures on Wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics, jun. 1992.
- [47] A. Ladrón de Guevara López-Sáez. *Sistema de medida para detección de defectos en materiales compuestos avanzados mediante técnicas vibro-acústicas*. Proyecto Fin de Carrera en Ingeniería de Telecomunicación, Universidad de Granada, 2011.

- [48] J. C. Van den Berg (Editor). *Wavelet in physics*. Cambridge University Press, 2004.
- [49] Z. Ding. *The application of a type of new admissible function to the vibration of rectangular plates*. En *Computers & Structures*, 52 (2): 199–203, jul. 1994. doi: 10.1016/0045-7949(94)90272-0.
- [50] J. V. A. dos Santos, A. L. Araújo, C. M. M. Soares. *Eigenfrequency analysis of completely free multilayered rectangular plates using a higher-order model and Ritz technique*. En *Mechanics of Composite Materials and Structures*, 1998. doi: 10.1080/10759419808945893.
- [51] E. Douka, S. Loutridis, A. Trochidis. *Crack identification in beams using Wavelet analysis*. En *International Journal of Solids and Structures*, 40: 3557 – 3569, jun. 2003. doi: 10.1016/S0020-7683(03)00147-1.
- [52] E. Douka, S. Loutridis, A. Trochidis. *Crack identification in plates using Wavelet analysis*. En *Journal of Sound and Vibration*, 270: 279–295, feb. 2004. doi: 10.1016/S0022-460X(03)00536-4.
- [53] M. Galassi et al. *GNU Scientific Library Reference Manual*, tercera edición.
- [54] W. Fan, P. Qiao. *A 2-D continuous Wavelet Transform of mode shape data for damage detection of plate structures*. En *International Journal of Solids and Structures*, 46: 4379–4395, dic. 2009. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2009.08.022.
- [55] M. Farge, G. Pellegrino, K. Scheider. *Coherent vortex extraction in 3D turbulent flows using orthogonal Wavelets*. En *Physical Review Letters*, 87 (5): 054501, jul. 2002. doi: 10.1103/PhysRevLett.87.054501.
- [56] D. H. Felix, D. V. Bambill, C. A. Rossit, P. A. A. Laura. *Implementación del método de Rayleigh-Ritz en el estudio de la vibración transversal de placas rectangulares con complejidades adicionales*. En *Mecánica Computacional*, XXII (10), nov. 2003.
- [57] A. Fournier. *Atmospheric energetics in the wavelet domain. Part I: Governing equations and interpretation for idealized flows*. En *Journal of the Atmospheric Sciences*, 59 (7): 1182–1197, abr. 2002. doi: 10.1175/1520-0469(2002)059<1182:AEITWD>2.0.CO;2.

- [58] C. P. Fietzen, G. Mengelkamp, A. Güemes. *A CFRP plate with piezo-electric actuators and sensors as self-diagnosing intelligent structure*. En *International Conference on Noise and Vibration Engineering, ISMA*, pages 185–191. Leuven, Belgium, 2002.
- [59] A. Gallego, A. Benavent-Climent, C. Infantes. *An acoustic health monitoring of reinforced concrete slabs subjected to earthquake-type dynamic loading via measurement and analysis of acoustic emission signals*. En *Smart Structures and Systems*, 8 (4): 385–398, oct. 2011.
- [60] A. Gallego, A. Benavent-Climent, L. Romo-Melo. *Piezoelectric sensing and non-parametric statistical signal processing for health monitoring of hysteretic dampers used in seismic-resistant structures*. En *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2011. Enviado.
- [61] A. Gallego, J. F. Gil, E. Castro, R. Piotrkowski. *Identification of coating damage processes in corroded galvanized steel by acoustic emission wavelet analysis*. En *Surface and Coating Technology*, 201 (8): 4743–4756, ene. 2007. doi: j.surfcoat.2006.10.018.
- [62] A. Gallego, J. F. Gil, J. M. Vico, E. Castro, J. E. Ruzzante, R. Piotrkowski. *Wavelet Transform applied to acoustic emission signals from adherence scratch-tests on corroded galvanized coatings*. En *Advanced Materials Research*, 13-14: 83–88, feb. 2006. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMR.13-14.83.
- [63] A. Gallego, J. F. Gil, J. M. Vico, J. E. Ruzzante, R. Piotrkowski. *Coating adherence in galvanized steel assessed by Acoustic Emission Wavelet analysis*. En *Scripta Materialia*, 52 (10): 1069–107, mayo 2005. doi: j.scriptamat.2005.01.037.
- [64] A. Gallego, P. Moreno-García, C. Fernández Casanova. *Modal analysis of delaminated composite plates using the Finite Element method and damage detection via a combined Ritz/2d-Wavelet analysis*. En *Journal of Sound and Vibration*. Enviado.

- [65] J. R. Gartner, N. Olgac. *Improved numerical computation of uniform beam characteristic values and characteristic functions*. En *Journal of Sound and Vibration*, 84 (2): 481–489, oct. 1982. doi: 10.1016/S0022-460X(82)80029-1.
- [66] A. Gentile, A. Messina. *On the continuous Wavelet Transforms applied to discrete vibrational data for detecting open cracks in damaged beams*. En *International Journal of Solids and Structures*, 40 (2): 295–315, ene. 2003. doi: 10.1016/S0020-7683(02)00548-6.
- [67] H. Gökdağ, O. Kopmaz. *A new damage detection approach for beam-type structures based on the combination of continuous and discrete Wavelet Transforms*. En *Journal of Sound and Vibration*, 324: 1158–1180, jul. 2009. doi: 10.1016/j.jsv.2009.02.030.
- [68] A. Grossmann, J. Morlet. *Decomposition of Hardy functions into square integrable Wavelets of constant shape*. En *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 15 (4): 723–736, 1984. doi: 10.1137/0515056.
- [69] A. Haar. *Zur theorie der orthogonalen funktionensysteme*. En *Mathematische Annalen*, 69 (3): 331–371, sep. 1910. doi: 10.1007/BF01456326.
- [70] M. Huang, X. Q. Ma, T. Sakiyama, H. Matsuda, C. Morita. *Free vibration analysis of rectangular plates with variable thickness and point supports*. En *Journal of Sound and Vibration*, 300: 435 – 452, mar. 2007. doi: 10.1016/j.jsv.2005.01.059.
- [71] T. J. R. Hughes. *The Finite Element method*. Dover Publications, 2000.
- [72] P. Ch. Ivanov, L. A. N. Amaral, A. L. Goldberger, S. Havlin, M. G. Rosenblum, H. E. Stanley, Z. R. Struzik. *From 1/f noise to multifractal cascades in heartbeat dynamics*. En *Chaos*, 11 (3): 641–652, sep. 2001. doi: 10.1063/1.1395631.
- [73] L. Jacques, A. Coron, P. Vandergheynst, A. Rivoldini. *The YAWTb toolbox: Yet Another Wavelet Toolbox*. <http://rhea.tele.ucl.ac.be/yawtb>.
- [74] T. Kijewski, A. Kareem. *On the presence of end effects and their melioration in Wavelet-based analysis*. En *Journal of Sound and Vibration*, 256 (5): 980–988, oct. 2002. doi: 10.1006/jsvi.2001.4227.



- [75] C. S. Kim, P. G. Young, S. M. Dickinson. *On the flexural vibration of rectangular plates approached by using simple polynomials in the Rayleigh-Ritz method.* En *Journal of Sound and Vibration*, 143 (3): 379–394, dic. 1990. doi: 10.1016/0022-460X(90)90730-N.
- [76] J. H. Kim, H. S. Jeon, C. W. Lee. *Applications of the modal assurance criteria for detecting and locating structural faults.* En *Proceedings of the International Modal Analysis Conference*, pages 536–536. SEM Society for Experimental Mechanics inc., 1992.
- [77] R. Y. Kim, A. S. Crasto, G. A. Schoeppner. *Dimensional stability of composite in a space thermal environment.* En *Composites Science and Technology*, 60: 2601–2608, 2000. doi: 10.1016/S0266-3538(00)00052-X.
- [78] K. Y. Lam, K. C. Hung, S. T. Chow. *Vibration analysis of plates with cutouts by the modified Rayleigh-Ritz method.* En *Applied Acoustics*, 28 (1): 49–60, 1989. doi: 10.1016/0003-682X(89)90030-3.
- [79] P. A. A. Laura, C. P. Filipich, V. H. Cortinez. *Vibrations of beams and plates carrying concentrated masses.* En *Journal of Sound and Vibration*, 117 (3): 459 – 465, sep. 1987. doi: 10.1016/S0022-460X(87)80065-2.
- [80] H. P. Lee, S. P. Lim, S. T. Chow. *Prediction of natural frequencies of rectangular plates with rectangular cutouts.* En *Computers & Structures*, 36 (5): 861–869, 1990. doi: 10.1016/0045-7949(90)90157-W.
- [81] A. W. Leissa. *The free vibration of rectangular plates.* En *Journal of Sound and Vibration*, 31 (3): 257–293, dic. 1973. doi: 10.1016/S0022-460X(73)80371-2.
- [82] A. W. Leissa. *The historical bases of the Rayleigh and Ritz methods.* En *Journal of Sound and Vibration*, 287 (45): 961–978, nov. 2005. doi: 10.1016/j.jsv.2004.12.021.
- [83] S. P. Lim, N. R. Senthilnathan, K. H. Lee. *Rayleigh-Ritz vibration analysis of thick plates by a simple higher order theory.* En *Journal of Sound and Vibration*, 130 (1): 163–166, abr. 1989. doi: 10.1016/0022-460X(89)90527-0.

- [84] X. Liu, N. A. J. Lieven, P. J. Escamilla-Ambrosio. *Frequency response function shape-based methods for structural damage localisation*. En *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23 (4): 1243 – 1259, 2009. doi: 10.1016/j.ymsp.2008.10.002.
- [85] S. Loutridis, E. Douka, L. J. Hadjileontiadi, A. Trochidis. *A two-dimensional Wavelet Transform for detection of cracks in plates*. En *Engineering Structures*, 27 (9): 1327–1338, ago. 2005. doi: 10.1016/j.engstruct.2005.03.006.
- [86] S. Loutridis, E. Douka, A. Trochidis. *Crack identification in double-cracked beams using Wavelet analysis*. En *Journal of Sound and Vibration*, 277: 1025–1039, nov. 2004. doi: 10.1016/j.jsv.2003.09.035.
- [87] K. H. Low, G. B. Chai, G. S. Tan. *A comparative study of vibrating loaded plates between the Rayleigh-Ritz and experimental methods*. En *Journal of Sound and Vibration*, 199 (2): 285–297, ene. 1997. doi: 10.1006/jsvi.1996.0633.
- [88] C. J. Lu, Y. T. Hsu. *Vibration analysis of an inhomogeneous string for damage detection by Wavelet Transform*. En *International Journal of Mechanical Sciences*, 44 (4): 745–754, abr. 2002. doi: 10.1016/S0020-7403(02)00006-1.
- [89] A. El Mahi, M. Assarar, Y. Sefrani, J.-M. Berthelot. *Damping analysis of orthotropic composite materials and laminates*. En *Composites Part B: Engineering*, 39: 1069 – 1076, oct. 2008. doi: 10.1016/j.compositesb.2008.05.003.
- [90] N. M. M. Maia, J. M. M. Silva, E. A. M. Almas, R. P. C. Sampaio. *Damage detection in structures: from mode shape to frequency response function methods*. En *Mechanical Systems and Signal Processing*, 17 (3): 489 – 498, 2003. doi: 10.1006/mssp.2002.1506.
- [91] S. G. Mallat. *A theory for multiresolution signal decomposition: the Wavelet representation*. En *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11 (7): 674–693, jul. 1989. doi: 10.1109/34.192463.
- [92] S. G. Mallat. *A Wavelet tour of signal processing*. Academic Press, Cambridge, segunda edición, 1999.

- [93] F. Mateos, A. Beléndez, R. Fuentes. *Medida del coeficiente de dilatación térmica de tubos de fibra de carbono (C.F.R.P.)*. En *XXII Reunión Bienal de la Real Sociedad Española de Física : Palma de Mallorca, 1-7 de octubre de 1989*, volume 3, pages 137–138. Secretariat de Publicacions i Intercanvi Científic de la UIB, oct. 1989.
- [94] Y. S. Meyer. *Wavelets: algorithms and applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1993.
- [95] J. M. Mieres, I. Calvo, A. Miravete, E. Gutiérrez, E. Shahidi, C. López, J. Cuartero, P. Comino, R. Guzmán de Villoria. *Descripción de paso superior vehicular de la Autovía del Cantábrico realizado con materiales compuestos*. En *Materiales de Construcción*, Vol 56 (284), 2006. doi: 10.3989/mc.2006.v56.i284.20.
- [96] P. Moreno-García, E. Castro, L. Romo-Melo, A. Gallego, J. L. Pérez-Aparicio, A. Roldán. *Damage detection in CFRP plates by statistical methods of vibration test, Wavelet analysis and the Ritz method*. En *International Conference on Structural Engineering Dynamics, ICEDyn 2011*. Tavira, Portugal, jun. 2011.
- [97] P. Moreno-García, E. Castro, L. Romo-Melo, A. Gallego, A. Roldán. *Vibration tests in CFRP plates for damage detection via non-parametric signal analysis*. En *Shock and Vibration*, 2012. Aceptado.
- [98] M. Mulle, R. Zitoune, F. Collombet, P. Olivier, Y.-H. Grunevald. *Thermal expansion of carbon-epoxy laminates measured with embedded FBGS- Comparison with other experimental techniques and numerical simulation*. En *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 38 (5): 1414–1424, 2007. doi: 10.1016/j.compositesa.2006.08.008.
- [99] A. V. Ovensanova. *Applications of Wavelets to crack detection in frame structures*. Ph.D. thesis, University of Puerto Rico, 2000.
- [100] R. Palma-Guerrero. *Estudio numérico de cerámicas piezoeléctricas con defectos*. Trabajo de Investigación Tutelada, Universidad de Granada, 2006.

- [101] A. K. Pandey, M. Biswas, M. M. Samman. *Damage detection from changes in curvature mode shapes*. En *Journal of Sound and Vibration*, 145 (2): 321–332, 1991.
- [102] R. Pascual-Jiménez. *Model based structural damage assessment using vibrations measurements*. Ph.D. thesis, University of Liege, Belgium, 1999.
- [103] A. W. Phillips, R. J. Allemang. *Utilizing the modal assurance criterion (MAC) in the detection of repeated roots*. En *International Modal Analysis Conference (IMAC), 14 th*, pages 665–670. Dearborn, MI, EEUU, feb. 1996.
- [104] PI® PI-ceramic. *DuraAct®-Piezoelectric Patch Transducers for Industry and Research*.
- [105] PI® PI-ceramic. *Piezoceramic Components*.
- [106] PI® PI-ceramic. *Piezoceramic Materials*.
- [107] PI® PI-ceramic. *Piezoelectric Ceramic Products. Fundamentals, characteristics and applications*.
- [108] R. Piotrkowski, E. Castro, A. Gallego. *Wavelet power, entropy and bispectrum applied to AE signals for damage identification and evaluation of corroded galvanized steel*. En *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23 (2): 432–445, mar. 2009. doi: j.ymsp.2008.05.006.
- [109] R. Piotrkowski, A. Gallego, E. Castro, M. T. García-Hernández, J. E. Ruzzante. *Ti and Cr nitride coating/steel adherence assessed by Acoustic Emission Wavelet analysis*. En *NDT and E International*, 38 (4): 260–267, jun. 2005. doi: 10.1016/j.ndteint.2004.09.002.
- [110] S. T. Quek, Q. Wang, L. Zhang, K. K. Ang. *Sensitivity analysis of crack detection in beams by Wavelet technique*. En *International Journal of Mechanical Sciences*, 43 (12): 2899–2910, dic. 2001. doi: 10.1016/S0020-7403(01)00064-9.
- [111] Brüel & Kjær. *PULSE- Getting started: An introduction to PULSE*, 2003.

- [112] C. P. Ratcliffe. *A frequency and curvature based experimental method for locating damage in structures*. En *Journal of Vibration and Acoustics*, 122 (3): 324–329, 2000. doi: 10.1115/1.1303121.
- [113] J. N. Reddy. *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. John Wiley & Sons, Inc., segunda edición, 2002.
- [114] J. N. Reddy. *An introduction to the Finite Element method*. McGraw-Hill, tercera edición, 2006.
- [115] W. Ritz. *Über eine neue methode zur lösung gewisser variationsprobleme der mathematischen physik*. En *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 135: 1–61, 1908.
- [116] W. Ritz. *Theorie der transversalschwingungen einer quadratische platte mit freien rändern*. En *Annalen der Physik*, 28: 737–786, 1909.
- [117] C. A. Rossit, P. M. Ciancio. *Free vibrations of anisotropic rectangular plates with holes and attached masses*. En *Structural Engineering and Mechanics*, 28 (1): 53–67, ene. 2008.
- [118] A. Rytter. *Vibration based inspection of civil engineering structures*. Ph.D. thesis, Department of Building Technology Structural Engineering. University of Aalborg, Denmark, 1993.
- [119] R. P. C. Sampaio, N. M. M. Maia, J. M. M. Silva. *Damage detection using the frequency-response-function curvature method*. En *Journal of Sound and Vibration*, 226 (5): 1029 – 1042, 1999. doi: 10.1006/jsvi.1999.2340.
- [120] S. Savithri, T. K. Varadan. *Comments on Rayleigh-Ritz vibration analysis of thick plates by a simple higher order theory*. En *Journal of Sound and Vibration*, 140 (2): 348, jul. 1990. doi: 10.1016/0022-460X(90)90534-7.
- [121] Z. Y. Shi, S. S. Law, L. M. Zhang. *Improved damage quantification from elemental modal strain energy change*. En *Journal of Engineering Mechanics*, 128 (5): 521–530, feb. 2002. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:5(521).

- [122] B. Singh, S. Chakraverty. *On the use of orthogonal polynomials in the Rayleigh-Ritz method for the study of transverse vibration of elliptic plates.* En *Computers & Structures*, 43 (3): 439 – 443, mayo 1992. doi: 10.1016/0045-7949(92)90277-7.
- [123] D. Srinivasarao, K. M. Rao, G. V. Raju. *Crack identification on a beam by vibration measurement and Wavelet analysis.* En *International Journal of Engineering Science and Technology*, 2 (5): 907–912, mayo 2010.
- [124] W. Sweldens. *The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal Wavelets.* En *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 3 (2): 1186–1200, abr. 1996. doi: 10.1006/acha.1996.0015.
- [125] R. L. Taylor. *FEAP - A Finite Element Analysis Program (User Manual, version 7.5)*, ago. 2003.
- [126] A. C. Ugural. *Stresses in plates and shells.* McGraw-Hill, 1981.
- [127] M. M. Abdel Wahab, G. De Roeck. *Damage detection in bridges using modal curvatures: application to a real damage scenario.* En *Journal of Sound and Vibration*, 226 (2): 217 – 235, 1999. doi: 10.1006/jsvi.1999.2295.
- [128] Q. Wang, X. Deng. *Damage detection with spatial Wavelets.* En *International Journal of Solids and Structures*, 36 (23): 3443–3468, ago. 1999. doi: 10.1016/S0020-7683(98)00152-8.
- [129] W. M. West. *Illustration of the use of modal assurance criterion to detect structural changes in an orbiter test specimen.* En *Proceedings of the air Force Conference on aircraft Structural Integrity*, pages 1–6. 1986.
- [130] J. M. Whitney. *Structural analysis of laminated anistropic plates.* Technomic Publishing Company, Inc., 1987.
- [131] Wikipedia. *Spearman's rank correlation coefficient - Wikipedia, The Free Encyclopedia*, 2012.
- [132] Y. J. Yan, H. N. Hao, L. H. Yam. *Vibration-based construction and extraction of structural damage feature index.* En *International Journal of Solids and Structures*, 41 (24): 6661–6676, dic. 2004. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2004.05.069.

- [133] S. H. Yoo, H. K. Kwak, B. S. Kim. *Detection and location of a crack in a plate using modal analysis*. En *SPIE proceedings series*, pages 1902–1908. Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers, 1999.
- [134] D. Young. *Vibration of rectangular plates by the Ritz method*. En *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, 17 (4): 448–453, dic. 1950.
- [135] D. Zheng, B. F. Chao, Y. Zhou, N. Yu. *Improvement of edge effect of the Wavelet time-frequency spectrum: application to the length-of-day series*. En *Journal of Geodesy*, 74 (2): 249–254, mar. 2000. doi: 10.1007/s001900050283.
- [136] D. Zhou. *Natural frequencies of elastically restrained rectangular plates using a set of static beam functions in the Rayleigh-Ritz method*. En *Computers & Structures*, 57 (4): 731–735, nov. 1995. doi: 10.1016/0045-7949(95)00066-P.
- [137] D. Zhou. *Natural frequencies of rectangular plates using a set of static beam functions in Rayleigh-Ritz method*. En *Journal of Sound and Vibration*, 189 (1): 81–87, ene. 1996. doi: 10.1006/jsvi.1996.0006.
- [138] D. Zhou, S. H. Lo, F. T. K. Au, Y. K. Cheung. *Vibration analysis of rectangular Mindlin plates with internal line supports using static Timoshenko beam functions*. En *International Journal of Mechanical Sciences*, 44 (12): 2503–2522, 2002. doi: 10.1016/S0020-7403(02)00188-1.
- [139] X. Q. Zhu, S. S. Law. *Wavelet-based crack identification of bridge beam from operational deflection time history*. En *International Journal of Solids and Structures*, 43 (7): 2299 – 2317, abr. 2006. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2005.07.024.
- [140] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. *El método de los Elementos Finitos. Volumen 1: Formulación básica y problemas lineales*. McGraw-Hill, cuarta edición, 1994.
- [141] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. *El método de los Elementos Finitos. Volumen 2: Mecánica de sólidos y fluidos. Dinámica y no linealidad*. McGraw-Hill, cuarta edición, 1994.
- [142] G. Zweig, R. Lipes, J. R. Pierce. *The cochlear compromise*. En *The Journal of the Acoustical Society of America*, 59 (4): 975–982, abr. 1976. doi: 10.1121/1.380956.